Permutációs orbifoldok és alkalmazásaik

MTA doktori értekezés

Bántay Péter

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A permutációs orbifoldok – jelen értekezés tárgyát alkotó – elmélete több, látszólag alapvetően eltérő szempontból vizsgálható. A tradicionális megközelítés szerint a kétdimenziós konform térelméletek [23, 50] egy fontos alosztályának, az orbifold modelleknek [44, 45] egy speciális válfaját alkotják a permutációs orbifoldok [68, 25, 8, 11, 20, 61], amikor az úgynevezett twistcsoport egy permutációcsoport, azaz valamely szimmetrikus csoport részcsoportja[1]. Ebből a szempontból nézve a fő eredmény úgy fogalmazható meg, hogy bár ezen modellek általában se nem holomorfak – azaz az orbifoldizáció előtti elmélet primér tereinek száma (a maximálisan kiterjesztett szimmetria-algebrára nézve) egynél nagyobb –, se nem ábeliek – azaz a twistcsoport általában nem kommutatív –, mégis teljes mértékben ellenőrzésünk alatt áll az elmélet szerkezete, éles ellentétben az általános esettel, ahol a fenti körülmények között gyakorlatilag semmilyen lényegi információval nem rendelkezünk néhány teljesen átfogó, és ezért gyakorlatilag semmitmondó megállapítástól eltekintve. Könnyen belátható, hogy a permutációs orbifoldoknak ezen alapvető tulajdonsága, sőt, egyáltalán a kérdésfeltevés jogossága – vagyis univerzális, a dinamika részleteitől többé-kevésbé független össze-

[1] A konform térelméletekkel és orbifold modellekkel kapcsolatos alapvető ismeretek megtalálhatók a szerző kandidátusi értekezésében [73].

függések létezése – a twist-csoport hatásának univerzalitásával (permutációs hatás) magyarázható, ezért az általános esetben nem is várható a permutációs orbifoldok elméletének mélységét és részletességét (akár csak részben) megközelítő elmélet létezése.

A permutációs orbifoldok elmélete egy alternatív, kevésbé elterjedt értelmezés szerint a mértékszimmetriák általános elméletének egy nagyon speciális alfejezete. Speciális típusú mértékszimmetriák – diszkrét permutációs szimmetriák – hatását vizsgálja speciális dinamikájú – kétdimenziós konforminvariáns – kvantumtérelméletekben. Ebből a szempontból az elmélet érdekessége megint csak abban rejlik, hogy – ellentétben az általános esettel – a permutációs orbifoldok szerkezete lényegében ismert: bármely fizikailag releváns kérdés elvileg megválaszolható [8, 11]. Ez persze nem jelenti azt, hogy az összes felmerülő kérdésre már ismert a válasz, sem azt, hogy egy adott kérdés megválaszolása triviális lenne, mindössze annyit, hogy az elmélet főbb alapelvei és módszerei tisztázottak, szemben a mértékszimmetriák általános elméletével, ahol néhány általános összefüggésen túl leginkább csak közelítő módszerek állnak rendelkezésre a mértékszimmetriák hatásának tanulmányozására. Persze a fent említett két megközelítés egyáltalán nem független egymástól: általában megállapítható, hogy az orbifold modellek nemtriviális diszkrét mértékszimmetriákkal rendelkező konform térelméletekként értelmezhetők, ahol a twist-csoport nem más, mint a diszkrét mértékszimmetriák csoportja. Pragmatikus szempontból úgy fogalmazhatunk, hogy míg a konform térelméleti megközelítés szerint a permutációs orbifoldok elmélete egy általános konstrukciós eljárást ad, melynek segítségével konzisztens konform térelméletekből új, szintén konzisztens konform térelméletek származtathatók teljes mértékben ellenőrzött körülmények között, addig a mértékszimmetriák elméletével kapcsolatos megközelítés szerint egy olyan kísérleti tereppel van dolgunk, ahol – megint csak kontrolált körülmények között – vizsgálhatjuk a mértékszimmetriák hatását egy kvantumtérelmélet szerkezetére.

A fent ismertetett két megközelítés már önmagában elegendő indokot szolgáltat a permutációs orbifoldok részletes tanulmányozására. Egy további fontos szempont, amely az elmélet jelentőségét indokolja, hogy fontos szerepet tölt be az alapvető kölcsönhatások végső egyesítését célul kitűző, jelenleg is rendkívül népszerű húrelméletek vizsgálatában. Egyfelől a húrok másodkvantálásának problematikája a legegyszerűbben a permutációs orbifoldok egy speciális válfaja, az úgynevezett szimmetrikus szorzatok [37, 16] segítségével tárgyalható; másrészt a permutációs orbifoldok szolgáltatják a jelenleg ismert leghatékonyabb módszert a húrelméletek és a kétdimenziós konform térelméletek mélyebb tulajdonságainak vizsgálatára [9]. A perturbatív húr-vákuumok és partíciós függvényeik osztályozására irányuló próbálkozások alapja a később tárgyalandó kongruencia-részcsoport tulajdonság, amelynek egyetlen ismert bizonyítása a permutációs orbifoldok elméletén alapszik, de a húrelmélet nemperturbatív aspektusainak vizsgálatában is jelentős szerep jut az elméletnek, például az ún. permutációs D-brane konfigurációk révén [75].

Összegezve azt mondhatjuk, hogy a permutációs orbifoldok elmélete mind elvi – a mértékszimmetriáknak egy fizikai rendszer viselkedésére gyakorolt hatásának jobb megértésében –, mind gyakorlati szempontból – a húrelmélet és a konform térelmélet különféle kérdéseinek tanulmányozásában – fontos szerepet tölt be a modern elméleti fizikában. Jelen értekezés célja, hogy felvázolja az elmélet alapvető eredményeit és azok néhány fontosabb alkalmazását. Ennek megfelelően a második fejezetben – a mértékszimmetriákkal és orbifold modellekkel kapcsolatos általános megfontolások rövid áttekintése után – ismertetjük a permutációs orbifold precíz definícióját. A harmadik fejezetben tárgyaljuk a permutációs orbifoldok két olyan alaptulajdonságát – a tranzitivitást és az univerzalitást –, amelyek döntő szerepet játszanak mind az elmélet kifejtésében, mind a különféle alkalmazásaiban. A negyedik fejezetben – a partíciós függvény konform térelméleti fogalmának áttekintése után, beleértve a magasabb génuszok esetét – ismertetjük a permutációs orbifoldok partíciós függvényeinek szerkezetét, amely az elmélet egyik legfontosabb eredménye, és fontos szerepet játszik például a szimmetrikus szorzatok elméletében. Az ötödik fejezetben tárgyaljuk a permutációs orbifoldok primér tereinek osztályozását, a királis karakterek szerkezetét, a moduláris adatok és a fúziós szabályok kapcsolatát az orbifoldizáció előtti rendszer megfelelő mennyiségeivel. A hatodik fejezetben megfogalmazzuk az orbifold-kovariancia elvét, és ismertetjük két fontos alkalmazását: egyfelől az irányítatlan húrok elméletében fontos szerepet játszó Klein-amplitúdó alakjára vonatkozó – Pradisi, Sagnotti és Stanev nevéhez fűződő – sejtés alátámasztásában; másfelől a racionális konform térelméletek egyik alapvető tulajdonságának, az ún. kongruencia-részcsoport tulajdonságnak az igazolásában. Végül az utolsó, hetedik fejezetben összefoglaljuk az értekezésben ismertetett eredményeket, és kitekintést adunk az elmélet további potenciális alkalmazásairól, valamint továbbfejlesztési lehetőségeiről. Az értekezést három függelék zárja, amelyekben néhány, az értekezésben fontos szerepet játszó matematikai fogalom kerül ismertetésre.

E ponton célszerűnek tűnik röviden vázolni a permutációs orbifoldok elméletének előzményeit és az elmélet kidolgozásának főbb állomásait. Az orbifoldok fogalmát 1985-ben vezette be Dixon et al. [44, 45] a húrelmélet realisztikus kompaktifikációinak vizsgálata során. Mivel a húrelméletek belső szerkezetéből következik, hogy sima Minkowski-térben konzisztens húrdinamika csak bizonyos dimenziókban, az ún. *kritikus dimenziókban* lehetséges – bozonikus húrokra a kritikus dimenzió értéke 26, míg szuperhúrokra ez az érték 10 –, ezért az egyik legfontosabb előfeltétele annak, hogy a húrelméletet az alapvető fizikai kölcsönhatások egyesített elméletének megalkotásában felhasználjuk az, hogy megmagyarázzuk, miért csak négy dimenziót észlelünk az alacsony (értsd: Planck-skálához viszonyítva alacsony) energiákon. E probléma feloldására született egyik legkorábbi, máig legnépszerűbb elképzelés szerint a fizikai téridő a négydimenziós Minkowski-tér és egy olyan kompakt sokaság Descartes-szorzataként áll elő, melynek belső dimenziói annyira görbültek, hogy jelenlétük nem mutatható ki alacsony energiákon. Ilyen típusú sokaságokra példák az ún. *Calabi-Yau sokaságok*, melyek mindmáig fontos szerepet játszanak a szuperhúrelmélet kompaktifikációinak vizsgálatában. Ezen sokaságok előnye, hogy topológiai szerkezetük biztosítja a kompaktifikált elmélet több jó tulajdonságát: a kompaktifikált elmélet téridő-szuperszimmetriáját (amely például megoldást nyújthat a hierarchia problémára), a kompaktifikált elmélet spektruma feletti ellenőrzést (a királis fermion-családok számát a sokaság Euler-karakterisztikája határozza meg), az alacsonyenergiás mértékszimmetriák realisztikus voltát, stb. Viszont nagy hátrányuk, hogy ezen sokaságok metrikus tulajdonságaival kapcsolatos ismereteink korlátozott volta nem teszi lehetővé a kompaktifikált elmélet részletes összevetését az alacsonyenergiás tapasztalatokkal.

A Calabi-Yau kompaktifikációkkal szemben az ún. toroidális kompaktifikációk – amikor a belső görbült sokaság egy megfelelő dimenziós tórusz, amit az euklideszi térnek egy transzlációcsoport szerinti faktortereként kapunk – lehetővé teszik az alacsonyenergiás elmélet tulajdonságainak részletes elemzését, például az alacsonyenergiás gerjesztések Yukawa-csatolásainak explicit meghatározását. Hátrányuk viszont, hogy semmiképpen nem vezethetnek realisztikus húrfenomenológiára: az alacsonyenergiás elmélet részecskespektruma és mértékszimmetriái nem egyeztethetők össze a kísérleti tapasztalatokkal. Az *orbifold kompaktifikációk* [44, 45] alapötlete az, hogy toroidális kompaktifikációk helyett olyan belső sokaságokat tekintsünk, amelyek egy megfelelő dimenziós tórusznak egy diszkrét – általában véges – izometriacsoport szerinti faktortereként állnak elő. Ezzel egyrészt kompaktifikációknak egy olyan osztályához jutunk, amely elég közel áll a toroidális kompaktifikációkhoz ahhoz, hogy remélhetőleg a toroidális kompaktifikációkra kidolgozott számítási eljárások és csoportelméleti módszerek segítségével a fontos jellemzők meghatározhatók lesznek, másrészt lehetőség nyílik az alacsonyenergiás részecskespektrum és a mértékszimmetriák jelentős mértékű redukciójára.

Ami a második pontot illeti, az orbifold kompaktifikációk beváltották a hozzájuk fűzött reményeket: megfelelő módszerekkel konstruálhatók olyan orbifold kompaktifikációk, melyek alacsonyenergiás mértékcsoportja megegyezik valamely népszerű GUT, vagy akár a Standard Modell mértékcsoportjával, és a részecskespektrum is igen közel áll a kívánatoshoz. Sajnos – leszámítva néhány igen egyszerű, ciklikus izometriacsoportokra alapozott esetet, amelyek nem szolgáltatnak realisztikus húrkompaktifikációt –, a fizikai jellemzők meghatározása komoly akadályokba ütközik. Többek között mind a mai napig nem létezik általános eljárás nemkommutatív csoportokon alapuló orbifold kompaktifikációk vizsgálatára, bár ezek lennének a legalkalmasabbak realisztikus alacsonyenergiás viselkedés leírására. A fentiek ellenére az orbifold kompaktifikációk mindmáig jelentős szerepet játszanak a húrelmélet általános kérdéseinek tanulmányozásában és az úgynevezett húrfenomenológiában.

Az orbifold modellek tanulmányozásában a következő, döntő jelentőségű előrelépés Dijkgraaf et al. nevéhez fűződik [39]. Ők ismerték fel 1989-ben – pontosabban ők fogalmazták meg elsőként –, hogy az orbifold modellek nem mások, mint diszkrét mértékszimmetriákkal rendelkező kétdimenziós konform térelméletek. Analízisük során megmutatták, hogy speciális típusú, úgynevezett *holomorf orbifoldok* esetén (amikor az orbifoldizáció előtti elméletnek mindössze egy primér tere van) az elmélet szerkezete lényegében leírható pusztán csoportelméleti módszerekkel: mai szóhasználattal élve, egy holomorf orbifoldhoz asszociált *moduláris tenzorkategóriát* [72, 82, 2] teljes mértékben meghatároz az orbifoldizációhoz felhasznált diszkrét mértékcsoport – a *twist-csoport* –, bizonyos kohomologikus jellemzők erejéig. Eme kohomologikus jellemzők szerepét, illetve a holomorf orbifoldoknak a háromdimenziós topologikus térelméletekkel való kapcsolatát egy évvel később tisztázta Dijkgraaf és Witten [40] híres cikke. Bár e két cikk alapján lehetővé vált a holomorf orbifold modellek moduláris tulajdonságainak és fúziós szabályainak explicit meghatározása, több alapvető kérdés mindmáig tisztázatlan e témakörben:

1. Mi a kapcsolat a twist-csoport konkrét realizációja (mint az orbifoldizált elmélet szimmetriacsoportja) és a konstrukcióban szereplő 3-

kociklus között?

2. Hogyan határozhatók meg az elmélet más, a moduláris tulajdonságokon túlmutató jellemzői, például a partíciós függvények, a királis karakterek, a korrelációs függvények, stb?

3. Hogyan általánosítható az elmélet nem-holomorf orbifoldokra?

A fent ismertetett eredmények egy másik hiányossága volt a konkrét számszerű értékeket szolgáltató formulák rendkívül bonyolult, nehezen kezelhető volta, ami – utólagos bölcsességgel – a leíráshoz használt matematikai apparátus inadekvát voltát tükrözte. A kiutat ebből a helyzetből az akkoriban elterjedő *Hopf-algebrai módszerek* szolgáltatták. A holomorf orbifoldok moduláris tulajdonságainak Hopf-algebrai leírását elsőként Dijkgraaf et al. [38], valamint a szerző [3, 4, 73] adta meg. E leírás alapja az a felismerés, hogy tetszőleges (diszkrét) csoporthoz és annak egy unimoduláris 3-kociklusához hozzárendelhető egy kvázi-trianguláris kvázi Hopf-algebra, a csoport úgynevezett (twistelt) duplája, amely egyfelől realizálódik az orbifold modell állapotterén, másfelől ábrázolásai egy moduláris tenzorkategóriát alkotnak, amely megegyezik az adott twist-csoportú holomorf orbifold modellhez asszociált moduláris tenzorkategóriával. Másszóval, a twist-csoport (twistelt) duplája ábrázolásainak ismeretében meghatározhatók a holomorf orbifold modell moduláris tulajdonságai. Döntő egyszerűsítésre vezet az a tény, hogy – a véges csoportok ábrázolási karaktereinek mintájára – véges csoportok duplájának ábrázolásaihoz is hozzárendelhetők egyszerű numerikus invariánsok, a karakterek, melyek a szokásos ábrázolási karakterekhez hasonló tulajdonságokkal bírnak, például ortogonalitási relációkat elégítenek ki, és amelyek segítségével egyszerű alakban fejezhetők ki a holomorf orbifold modell moduláris adatai [4].

A Hopf-algebrai leírás, bár eredetileg csak a korábbról már ismert, holomorf orbifoldokra vonatkozó eredmények matematikailag adekvát leírására szolgált, messze túlmutat a fenti célkitűzésen. Segítségével lehetővé vált olyan kérdések vizsgálata, mint a holomorf orbifoldok magasabb génuszú tulajdonságai [5, 6] vagy a szimmetriasértő határfeltételek [56]. Megjegyezzük, hogy létezik a konstrukciónak egy messzemenő, az úgynevezett kétdimenziós csoportok [26] (más elnevezéssel keresztezett modulusok) elméletén alapuló általánosítása, melynek egy speciális részeseteként kapjuk vissza a csoportodupl ák ábrázoláselméletét (egy másik speciális esetben a csoportok szokásos ábrázoláselmélete adódik), de eme új eredmények tárgyalása messze túlmutatna jelen értekezés témáján.

A fent vázolt fejleményekkel nagyjából egyidőben vezette be Klemm és Schmidt [68] a *permutációs orbifold* fogalmát. Alapötletük a következő volt: tekintsünk egy konform térelmélettel leírható rendszert, és vegyünk belőle több, egymástól független (azaz nem kölcsönható) replikát. Ezen replikák összessége egy új rendszert alkot, melynek dinamikája továbbra is leírható egy kétdimenziós konform térelmélettel, és az egyes alrendszerek megkülönböztethetetlensége miatt a replikák minden egyes permutációja a rendszer egy szimmetriája. Ezért lehetőség nyílik ezen összetett rendszer alrendszereinek tetszőleges permutációit mértékszimmetriáknak tekinteni, azaz az általuk generált twist-csoporttal orbifoldizálni: e konstrukció eredményét nevezzük permutációs orbifoldnak. Klemm és Schmidt felismerése az volt, hogy ebben az esetben az általánosságokon túlmenő határozott jóslatok fogalmazhatók meg a permutációs orbifold szerkezetére vonatkozóan, felhasználva a partíciós függvények moduláris tulajdonságait. Fontos megemlíteni, hogy ez a konstrukció túlmutat a holomorf orbifoldok kérdéskörén, mivel az egyes replikák dinamikáját leíró konform térelméletre vonatkozóan semmiféle megszorítást nem szükséges tenni.

Klemm és Schmidt eredeti munkáját az évek folyamán több cikk követte [53], amelyek a partíciós függvények moduláris tulajdonságainak kiaknázásával igyekeztek feltárni a permutációs orbifoldok szerkezetét. Itt érdemes megemlíteni, hogy még a permutációs orbifold fogalmának bevezetése előtt Forgács et al. realisztikus húrkompaktifikációk vizsgálata során leírták az 1-es szintű E_8 Wess–Zumino-modell egy $\mathbb{Z}_2$ permutációs orbifoldját [48].

A döntő előrelépés a permutációs orbifoldok elméletében Borisov, Halpern és Schweigert nevéhez fűződik, akik 1998-ban megadták a $\mathbb{Z}_2$ twist-csoporton alapuló permutációs orbifoldok moduláris tulajdonságainak, fúziós szabályainak, és királis karaktereinek szerkezetét, és felvázolták eme eredmények általánosítását prím rendű ciklikus twist-csoportokra [25]. A konkrét eredményeken túlmenően ez a cikk megmutatta, hogy a permutációs orbifoldok szerkezete lényegében meghatározható az eredeti, az egyes replikák dinamikáját leíró konform térelmélet és a twist-csoport ismeretében. Eme alapvető munka talán legfőbb hiányossága, hogy bár az eredmények világosan és meggyőzően lettek megfogalmazva, az eredményekhez vezető gondolatmenetről már nem állítható ugyanez. Egy másik, a fentivel összefüggő hiányossága a cikknek az, hogy nem ad támpontot arra nézve, hogyan lehet eredményeit általánosítani a prím rendű ciklikus twist-csoportok igencsak speciális esetéről tetszőleges, akár nemkommutatív permutációcsoportokra. Az elméletnek ezt a teljesen általános változatát végül a szerző dolgozta ki és publikálta több, egymásra épülő közleményben [8, 9, 10, 11, 15].

Borisov et al. cikkét időben némileg megelőzve és attól függetlenül született meg Dijkgraaf et al. munkássága eredményeként az úgynevezett *szimmetrikus szorzatok* elmélete [37], amely a permutációs orbifoldok elméletének egy rendkívül fontos speciális esete. Az elmélet alapjául szolgáló elképzelés a következő módon fogalmazható meg: a kvantumelmélet egyik alapelve, az azonos részecskék megkülönböztethetetlenségének elve szerint azonos típusú elemi objektumok permutációs szimmetriája mindig mértékszimmetria. Hogyan érvényesíthető ez az elv abban az esetben, ha az elemi objektumok húrok, vagyis hogyan kell másodkvantálni a húrelméletet? A nehézség abban rejlik, hogy szemben a kvantumtérelméletek elemi gerjesztéseivel, amelyek általában véges sok belső szabadsági fokkal rendelkeznek, és amelyek esetén a fenti elv az állapottér szimmetrizálásával (fermionok esetén antiszimmetrizálásával) érvényesíthető, a húrok végtelen sok belső szabadsági fokkal rendelkeznek, melyek dinamikáját egy kétdimenziós konform térelmélet írja le. Dijkgraaf et al. válasza a fenti kérdésre az, hogy a másodkvantált húrelméletben egy N-húr konfigurációt továbbra is egy konform térelmélet ír le, amit úgy kapunk, hogy az egyetlen húr dinamikáját leíró konform térelméletnek tekintjük az S_N szimmetrikus csoport szerinti permutációs orbifoldját (hiszen a húrok bármely permutációja mértékszimmetria). Természetesen, mivel egy másodkvantált elméletben a húrok számát nem rögzíthetjük, ezért a fizikai jellemzőket az összes N-húr konfiguráció jellemzőinek felösszegzésével határozhatjuk meg: meglepő módon, a fenti felösszegzés elvégezhető egy teljesen általános kombinatorikai eredmény segítségével.

Meg kell említeni, hogy a fentiek alapján a kvantummechanikából megismert dichotómia, vagyis a Bose-Einstein és a Fermi-Dirac statisztikák létezése, látszólag hiányzik a másodkvantált húrelméletből. Dijkgraaf ismerte fel [36], hogy ez valójában nincs így: az orbifoldizációs eljárás mindig módosítható egy kohomologikus jellemző, az úgynevezett diszkrét torzió bevezetésével [83], és szimmetrikus szorzatok esetén mindössze egy nemtriviális diszkrét torzió létezik (ez a szimmetrikus csoportok szerkezetéből adódik). Természetesnek tűnik ezt a jelenséget a bozon-fermion dichotómia húrelméleti megfelelőjeként értelmezni.

Dióhéjban összefoglalva, a fentiek jelentették a jelentősebb mérföldköveket a permutációs orbifoldok fogalmának kialakulásában. A következő fejezetben – a mértékszimmetriákkal és orbifold modellekkel kapcsolatos néhány általános meggondolás után – ismertetjük a permutációs orbifold precíz definícióját, majd a további fejezetekben ezek alapvető tulajdonságait, illetve az elmélet fontosabb eredményeit; végül röviden vázoljuk az elmélet néhány alkalmazását.

2. fejezet

Orbifoldok

Mint a bevezető fejezetben hangsúlyoztuk, a permutációs orbifoldok elmélete úgy is felfogható, mint a mértékszimmetriák hatásának vizsgálata speciális körülmények között. Mivel a mértékszimmetriákat sokan a Yang-Mills elméletekből ismert lokális mértékszimmetriákkal azonosítják, ezért először röviden tisztázzuk, hogy mit is értünk e fogalom alatt, majd utána áttérünk az orbifold modellek vizsgálatára általában. A fejezet legvégén bevezetjük a permutációs orbifold fogalmát, amely az értekezés tulajdonképpeni tárgyát alkotja.

2.1. Mértékszimmetriák

A fizika alapvető feladata a fizikai objektumok időfejlődésének leírása, vagyis annak megválaszolása, hogy adott kezdeti- és mellékfeltételek mellett a vizsgált objektum hogyan változtatja állapotát az idő múlásával. Mivel kvantitatív leírásra törekszünk, ezért az állapotokat numerikus paraméterekkel jellemezzük, bevezetve az állapotok terét: ez lehet például az objektum fázistere a klasszikus mechanikában, vagy az objektum Hilbert-tere a kvantumelméletben, de elvileg más leírások is lehetségesek. A rendszer időfejlődését egy állapottérbeli folytonos görbe írja le, és a dinamikai elv – legyen az variációs elv, differenciálegyenlet-rendszer, vagy bármi más – kiválasztja az összes folytonos görbe közül azokat, amelyek valódi fizikai időfejlődésnek felelnek meg[1]. E leírásban az objektum egy szimmetriája nem más, mint az állapottér egy olyan transzformációja, amely a dinamikai elv által megengedett bármely trajektóriát egy szintén megengedett trajektóriába visz át, azaz felcserélhető az időfejlődéssel.

Fontos megjegyezni, hogy az állapottér különböző pontjai nem szükségszerűen felelnek meg különböző fizikai állapotoknak, vagyis az állapotleírás nem feltétlenül egyértelmű. Ennek lehetnek mind pragmatikus, mind elvi okai: meglehet, hogy a dinamikai elv megfogalmazása különösen egyszerű egy adott állapottéren, amelynek pontjai nincsenek egy-egyértelmű kapcsolatban a fizikai állapotokkal, de az is előfordulhat, hogy elvi okok miatt nem lehetséges egyértelmű állapotleírás. Bárhogy is legyen, kitüntetett szerepet játszanak azon szimmetriák, amelyek az állapottér bármely pontját ugyanazon fizikai állapotnak megfelelő pontba transzformálják. Ezen szimmetriákat nevezzük mértékszimmetriáknak, és összességük alkotja az elmélet mértékcsoportját.

Jól ismert példát szolgáltat mértékszimmetriákra a klasszikus elektrodinamika vákuumban. Ekkor ugyan lehetséges az egyértelmű állapotleírás, hiszen az elektromos és a mágneses térerősség egyértelműen jellemzi az elektromágneses tér állapotát, a dinamikai elvet pedig a Maxwell-egyenletek szolgáltatják, de lehetséges egy alternatív, az elektromágneses potenciálokon alapuló állapotleírás is, amely már nem egyértelmű, de a dinamikai elv leegyszerűsödik, hiszen az elektromágneses potenciálok mindegyike egy forrásmentes hullámegyenletet elégít ki. Ez esetben a mértékszimmetriák nem mások, mint a klasszikus mértéktranszfomációk az elektromágneses potenciálokon. Egy másik fontos példa az azonos részecskék permutációs szimmetriája a kvantumelméletben: az azonos részecskék megkülönböztethetetlenségé-

[1] Az így adódó lehetőségek közül a valódi trajektóriát nyilván a kezdeti- és peremfeltételek választják ki.

nek elve azt mondja ki, hogy azonos objektumok felcserélése egy mértékszimmetria. Ezen elv, illetve a hozzá szorosan kapcsolódó Pauli-elv jelentőségét nem kell külön hangsúlyozni. A Standard Modell megfogalmazásában szerepet játszó lokális mértékszimmetriák szintén fontos, bár némileg speciális példát szolgáltatnak a fenti általános fogalomra.

Összefoglalva a fentebb kifejtetteket, egy fizikai objektum leírásában három alapvető adat játszik szerepet: az állapotok numerikus jellemzését szolgáló állapottér, a fizikai trajektóriákat kiválasztó dinamikai elv, és az állapotleírás többértelműségét jellemző mértékcsoport. Adott állapottér és dinamikai elv mellett több különböző lehetőség adódik a mértékcsoportra, elvileg a dinamika szimmetriacsoportjának bármely részcsoportja szóba jöhet, és ezen lehetőségek mindegyike más-más fizikai szituációt ír le. Felmerűl a kérdés: mi a kapcsolat az azonos állapotterű és dinamikájú, de más-más mértékcsoporttal jellemzett objektumok fizikai jellemzői között?

A fenti kérdés messze nem triviális, és a válasz általában nem ismert. Gyakran csak arra van lehetőség, hogy valamilyen közelítő módszerrel meghatározzuk adott mértékcsoport esetén a vizsgált objektumok egyes fizikai jellemzőit. Ez alól kivételt jelentenek a permutációs orbifoldok: mint látni fogjuk, esetükben teljes mértékben nyomon követhető a mértékcsoport befolyása a fizikai jellemzőkre. Ennek az az ára, hogy csak igen speciális típusú objektumok – kétdimenziós konform térelméletek – permutációs mértékszimmetriáit tudjuk tárgyalni.

2.2. Orbifoldokról általában

Az orbifold fogalmát az elméleti fizikába Dixon et al. vezette be [44, 45] realisztikus húrkompaktifikációk vizsgálata során. Húrok terjedését vizsgálták egy olyan téridőn, amelyet a Minkowski-térnek, illetve egy megfelelő tórusznak egy véges izometria-csoport szerinti kvócienseként lehet előállítani. Az elképzelés az volt, hogy ez még viszonylag hasonló elméletet eredményez, mint a sima téridőben propagáló húroké, amelynek jellemzőit csoportelméleti módszerekkel meg lehet határozni.

Korán felismerték, hogy a fenti konstrukció messzemenően általánosítható. Húroknak egy adott geometriai háttérben történő terjedését egy megfelelő konform térelmélettel írhatjuk le, a téridő izometriái ekkor a konform térelmélet speciális szimmetriáinak felelnek meg. Izometriák egy csoportja szerinti kvóciensen történő terjedést egy olyan konform térelmélet írja le, ahol a megfelelő szimmetriákat mértékszimmetriáknak tekintjük. E megfontolások alapján született meg az orbifoldizáció modern fogalma: amennyiben G egy konform térelmélet szimmetriáinak egy (diszkrét) csoportja, akkor a G szerinti *orbifold*ot úgy kapjuk, hogy a G-beli szimmetriákat mértékszimmetriáknak tekintjük [39].

Abból a tényből, hogy G - az úgynevezett *twist-csoport* - elemei mértészimmetriák, két fontos következmény adódik. Egyfelől, mivel a fizikai mennyiségek mértékinvariánsok, illetve a mértéktranszformációk azonosítják az állapottér különböző pontjait, ezért az orbifoldizáció során végre kell hajtani egy G-invariáns projekciót. Ami még fontosabb, hogy a nemtriviális mértékszimmetriák következtében az állapottér kiegészül új szektorokkal: a twist-csoport minden egyes $g \in G$ eleméhez tartozik egy $\mathcal{H}_g$ úgynevezett *twistelt szektor*, és a teljes Hilbert-tér ezek

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{H}_g \tag{2.1}$$

direkt összege. Mi több, a twist-csoport minden egyes $h \in G$ eleme (projektíven) ábrázolódik a teljes Hilbert-téren, és a $g \in G$-vel twistelt $\mathcal{H}_g$ szektort a hgh^{-1}-gyel twistelt $\mathcal{H}_{hgh^{-1}}$ szektorba viszi át:

$$h\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_{hgh^{-1}} \ . \tag{2.2}$$

A fenti két alaptulajdonságot modern szóhasználattal úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az orbifold modell Hilbert-terén (projektíven) ábrázolódik a twist-csoport duplája[2]. A csoportdupla projektív ábrázolásait a twist-csoport egy 3-kociklusa jellemzi, hasonlóan ahhoz, ahogy a csoport projektív ábrázolásait egy 2-kociklus. E 3-kociklust a twist-csoport hatásának konkrét alakja határozza meg, bár mindmáig ismeretlen e hatás és a 3-kociklus közötti összefüggés mikéntje (fontos példa nemtriviális 3-kociklussal jellemzett elméletre az úgynevezett *Moonshine-orbifold*, amely a *Moonshine-elmélet*[3] orbifoldja annak teljes automorfizmus-csoportjára vonatkozóan).

A Hilbert-tér fent vázolt szerkezete fontos információt nyújt a (tórusz) partíciós függvényről. Eszerint az mindig előállítható

$$Z(\tau) = \frac{1}{|G|} \sum_{(g,h)\in G^{\{2\}}} Z(g,h|\tau) \tag{2.3}$$

alakban, ahol $G^{\{2\}}$ jelöli a G elemeiből képezhető kommutáló elempárok összességét, és a $Z(g,h|\tau)$ járulék egy olyan funkcionálintegrállal értelmezhető, ahol a terek kváziperiódikus határfeltételeknek tesznek eleget: a világlepedő-koordináta 1-gyel való eltolása során monodrómiájuk g, míg τ-val való eltolás során h. Operátor formalizmusban $Z(g,h|\tau)$ nem más, mint a h szimmetriatranszformációt ábrázoló operátor q^{L_0}-val súlyozott nyoma a $\mathcal{H}_g$ twistelt szektorban.

A twistelt szektorok létezésének másik fontos következménye az úgynevezett *twist-terek* léte: ezek azon téroperátorok, amelyek valamely twistelt szektor alapállapotát keltik a vákuumból. Mivel a twist-terek nem lokálisak, ezért jelenlétük következtében vágások jelennek meg a korrelációs függvényekben. E vágások pontos szerkezete, illetve az általuk létrejövő többér-

[2]A csoportduplák fogalmát és elméletük alapjait a C. Függelék tartalmazza.

[3]A Moonshine-elmélet [51, 24] egy $c = 24$ centrális töltésű konform térelmélet, mely mindössze egy primér térrel rendelkezik (azaz holomorf), és automorfizmus-csoportja nem más, mint a legnagyobb szporadikus véges egyszerű csoport, vagyis az $\mathbb{M}$ Monster. A Moonshine-elmélet létezése az úgynevezett "Holdvilág" jelenségével kapcsolatos, ugyanis egyetlen primér terének királis karaktere – egy additív konstans erejéig – megegyezik a klasszikus moduláris invariánssal, mely komplex függvény az analitikus számelmélet egyik jól ismert szereplője [1, 35, 69, 78].

tékűség egyszerű modellekben kielemezhető [43, 62], és lehetőséget nyújt a korrelátorok meghatározására, illetve közvetlenül utal a Riemann-felületek fedéseivel való kapcsolatra, amely alapvető szerepet játszik a permutációs orbifoldok elméletében.

Az orbifold fogalom általános volta miatt a fentieknél részletesebb megállapítások nemigen tehetők: például nem áll rendelkezésre egyszerű módszer a $Z\left(g,h|\tau\right)$ járulékok explicit meghatározására, amely az elmélet egyik alapvető kérdése, és amely járulékok meghatározása még egyszerű esetekben is komoly nehézségeket okozhat. Ezzel szemben, mint azt majd látni fogjuk a továbbiakban, permutációs orbifoldok esetén egyszerű, zárt alakot kapunk ezen járulékokra. Szintúgy nem tárgyalható az általános esetben az orbifold modell primér tereinek osztályozása, a fúziós szabályok szerkezete, stb.

2.3. Holomorf orbifoldok

Egy konform térelméletet *holomorfnak* nevezünk, ha mindössze egy primér tere van a királis szimmetria-algebrára nézve (a vákuum) [39]. Ez azt jelenti, hogy Hilbert-terén a szimmetria-algebra irreducibilisen ábrázolódik, következésképpen az elmélet tórusz partíciós függvénye a moduláris paraméter valamely holomorf függvényének abszolútérték négyzete. Híres példák holomorf elméletekre az 1-es szintű E_8 Wess–Zumino-modell, illetve a "Holdvilág" jelenségének magyarázatában alapvető szerepet játszó Moonshine-elmélet [24, 51]. Megjegyezzük, hogy a holomorf elméletek igen ritkák, amit az a tény is illusztrál, hogy egy holomorf elmélet centrális töltése szükségszerűen a 8 egész számú többszöröse.

Egy holomorf orbifold nem más, mint egy holomorf elmélet orbifoldja. Dijkgraaf et al. ismerték fel [39], hogy egy holomorf orbifold moduláris adatait teljes mértékben meghatározza a twist-csoport ismerete, egy véges határozatlanság erejéig. A későbbiekben kiderült, hogy ez a kapcsolat a twist-csoport duplájának ábrázolásai segítségével írható le [38, 3, 4]. Valóban, mint minden orbifold modell esetén, a twist-csoport duplája ábrázolódik (esetleg projektíven) az elmélet Hilbert-terén. Adott 3-kociklussal jellemzett projektív ábrázolások által meghatározott moduláris adatok szolgáltatják a holomorf orbifold megfelelő adatait. Mivel egy véges csoportnak csak véges sok inekvivalens 3-kociklusa van, ezért csak véges sok különböző moduláris adat tartozhat egy adott twist-csoporthoz, innen ered a véges határozatlanság.

A fenti megfeleltetés ennél valamivel tovább megy, például egy-egyértelmű kapcsolatot állapít meg a holomorf orbifold primér terei és a twist-csoport duplájának irreducibilis (projektív) ábrázolásai között. Viszont semmi érdemlegeset nem tud mondani a holomorf orbifold korrelációs vagy partíciós függvényeinek szerkezetéről. Ez nem meglepő: vegyük észre, hogy a fentiekben mindössze azt tételeztük fel, hogy a twist-csoportot részcsoportja egy holomorf elmélet automorfizmus-csoportjának. De ilyen elméletből sok különböző lehetséges, melyek mind más-más orbifoldokra vezetnek, egészen más jellemzőkkel. Ezek meghatározásához sokkal részletesebb információra van szükség, mint a twist-csoport és annak egy 3-kociklusa.

A fentiek ellenére a holomorf orbifoldok elmélete döntő szerepet játszott a permutációs orbifoldok elméletének kialakulásában: egyfelől felhívta a figyelmet a csoportduplák és ábrázolásaik jelentőségére, másfelől lehetőséget nyújtott az általános elmélet egyes jóslatainak ellenőrzésére, hiszen egy holomorf elmélet permutációs orbifoldja egy holomorf orbifold, így vonatkoznak rá a holomorf orbifoldokra megállapított általános eredmények. Ez utóbbi észrevétel igen hasznosnak bizonyult például a permutációs orbifoldok primér tereinek osztályozásában (lásd 5.1 alfejezet).

2.4. Permutációs orbifoldok

Itt az ideje, hogy megfogalmazzuk, mit is értünk permutációs orbifold alatt. Permutációs orbifold egy olyan fizikai rendszer, amely eleget tesz az alábbi kritériumoknak:

1. A rendszer több, egymástól megkülönböztethetetlen alrendszerből áll;
2. Az egyes alrendszerek függetlenek, azaz nem befolyásolják egymás időfejlődését (nem hatnak kölcsön);
3. Minden egyes alrendszer dinamikáját egyazon kétdimenziós konform térelmélet írja le;
4. Az alrendszerek bizonyos permutációi a teljes rendszernek mértékszimmetriái.

A fenti definícióban szereplő, az egyes alrendszerek dinamikáját leíró konform térelméletet $\mathcal{C}$-vel, míg a permutációs mértékszimmetriák csoportját, vagyis a twist-csoportot Ω-val jelölve, a permutációs orbifold szokásos jelölése[4] $\mathcal{C} \wr \Omega$.

Fontos észrevenni, hogy mivel az egyes alrendszerek megkülönböztethetetlenek és dinamikájukat egy kétdimenziós konform térelmélet írja le, a permutációs orbifold dinamikáját szintén egy konform térelmélet fogja leírni. Azaz a permutációs orbifold konstrukció egy olyan eljárás, amely tetszőleges Ω permutációcsoport esetén egy konzisztens konform térelméletből egy új, szintén konzisztens térelméletre vezet: ez az észrevétel nem más, mint a 6. fejezetben tárgyalandó orbifold-kovariancia elve. Hogy a permutációs orbifold dinamikáját szintén egy konform térelmélet írja le abból az egyszerű észrevételből fakad, hogy a $\mathcal{C}$ elmélet minden szimmetriája (beleértve a konform transzformációkat is) egyben szimmetriája a permutációs orbifoldnak is, hiszen az egyes alrendszerek szimmetriacsoportjai direkt szorzatának diagonális részcsoportja kommutál az alrendszerek tetszőleges permutációjával, így e diagonális részcsoport a permutációs orbifold szimmetriacsoportjának is részcsoportja. Ez a tartalmazás általában valódi, azaz a permutációs orbifold szimmetriái általában kiterjedtebbek, mint az egyes alrendszereket leíró konform elméleté: például Cappelli és d'Appollonio megmutatta [27], hogy az

[4] Ezen jelölés értelmét a 3.1 alfejezetben tárgyalandó tranzitivitási tulajdonság indokolja.

Ising-modell (melynek szimmetria-algebrája a Virasoro-algebra) harmadfokú tranzitív permutációs orbifoldjai szuperkonform szimmetriával rendelkeznek.

Vegyük észre, hogy a fent definiált permutációs orbifold fogalom két extrém esetet is tartalmaz: az egyik esetben az Ω mértékcsoport az alrendszerek összes permutációinak teljes szimmetrikus csoportja, ezek az ún. szimmetrikus szorzatok [37, 16]; a másik esetben Ω triviális, vagyis csak az identikus permutációt tartalmazza. Ez utóbbi esetben az elmélet szerkezete világos: mivel az egyes alrendszerek függetlenek, ezért a teljes rendszer dinamikája egyszerűen meghatározható az alrendszerek dinamikájából, például a (Virasoro) centrális töltések összeadódnak, a korrelációs függvények pedig összeszorzódnak.

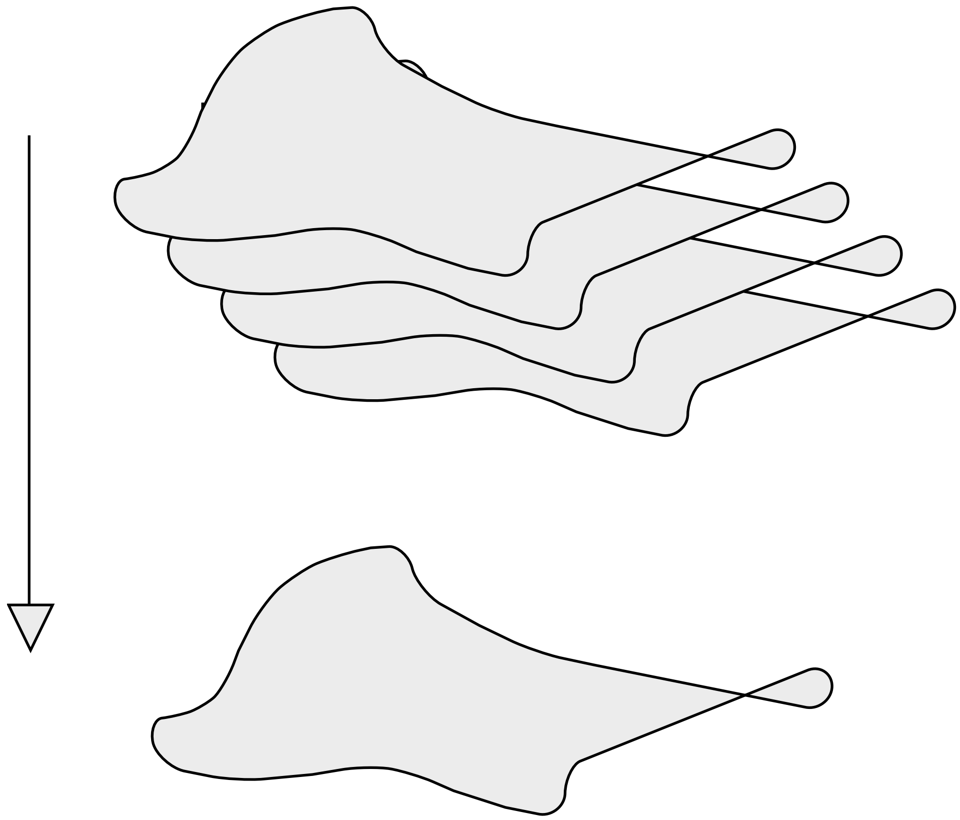
A permutációs orbifoldok leírásának alapja az elmélet geometriai hátterének, a fedőterek elméletével való kapcsolatnak a felismerése [8, 10]. Röviden összefoglalva, ez a következőt mondja: egy konform térelmélet minden egyes jellemzője egy geometriai objektumhoz kapcsolható, például egy partíciós függvény értéke egy konform struktúrához, vagy egy fúziós szabály egy háromdimenziós csomóhoz, stb. Amennyiben egy M geometriai objektumhoz rendelt jellemző értékét akarjuk kiszámolni a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifoldban, akkor az első lépésben meg kell határozni az M objektum összes olyan fedését, amelyek monodrómia-csoportja része Ω-nak. Minden egyes fedéshez tartozik egy fizikai jellemző, amelynek adott értéke van a $\mathcal{C}$ konform elméletben, és ezeknek az értékeknek a megfelelően súlyozott összege adja meg az M-hez rendelt jellemző értéket a permutációs orbifoldban.

A fent vázolt általános számítási eljárás, bár elvileg választ ad minden értelmes kérdésre, nem könnyen átlátható, éppen teljes általánossága folyományaként. Későbbi fejezetekben konkrét fizikai jellemzők meghatározásán fogjuk illusztrálni az általános elv működését. Az viszont könnyen belátható, hogy triviális Ω mértékcsoport esetén a fenti általános eljárás a jól ismert eredményt adja, vagyis a korrelációs függvények és fúziós szabályok faktorizálódnak, a centrális töltések összeadódnak, stb. Le kell azt is szögeznünk, hogy az elv alakalmazása specifikus kérdésekre egyáltalán nem triviális: gyakran már az egyes jellemzőkhöz rendelt geometriai objektumok meghatározása sem egyszerű feladat, nem beszélve az összes fedések meghatározásáról, illetve az ezekhez rendelt jellemzők kiszámításáról. Ennek ellenére a fenti geometriai kép az elmélet egyik fő eredménye, hiszen elvi lehetőséget biztosít az összes releváns kérdés megválaszolására véges sok lépésben.

A geometriai kép a következőképpen szemléltethető a korrelációs (beleértve a 0-pont, azaz partíciós) függvények esetében: amennyiben az Ω twist-csoport triviális, akkor az egyes alrendszerek egymástól teljesen függetlenül propagálnak a kétdimenziós téridőben, és semmilyen módon nem befolyásolják egymást. Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy különböző világlepedőkön propagálnak, amelyek között nincs semmilyen kapcsolat. Természetesen csak egy fizikai téridő létezik, ezért a fenti megjegyzést úgy kell érteni, hogy bevezetjük a fizikai téridőnek egy soklevelű fedését[5], ahol minden egyes alrendszernek egy külön levél felel meg, és ezen a fiktív téridőn vizsgáljuk az elméletet (lásd 2.1 ábra). Mivel az Ω mértékcsoport triviális, ezért a fedés is triviális lesz, vagyis a fizikai téridő azonos kópiáiból áll, és ennek következtében a korrelációs függvények faktorizálódnak.

Amennyiben az Ω twist-csoport nem triviális, a fenti kép annyiban módosul, hogy nemtriviális fedéseket is meg kell engedni. Valóban, mint azt korábban megbeszéltük, a twist-csoport minden eleméhez tartozik egy twistelt szektor a Hilbert-térben, és egy twist-tér, amely a megfelelő twistelt szektort kelti a vákuumból. Mint korábban utaltunk rá, e twist-terek hatására vágások jelennek meg a korrelációs függvényekben, amely vágások mentén kapcsolódnak egymáshoz a világlepedő fedésének levelei, a twist-teret jellemző csoportelemnek megfelelő lokális monodrómiával. Minden egyes megengedett fedés egy nemtriviális járulékot szolgáltat, és a fő feladat eme járulékok explicit meghatározása.

[5] A fedőfelületek fogalma és alapvető tulajdonságaik a B. Függelékben vannak összefoglalva.



2.1. ábra. Az ábra a világlepedő, vagyis a permutációs orbifold téridő sokaságának szerkezetét igyekszik illusztrálni. Minden egyes alrendszernek megfelel a világlepedő egy levele, amelyen az adott alrendszer propagál, természetesen a fizikai téridő a fedés bázisa. Ha a twist-csoport triviális, akkor a fedés is az, vagyis nincs kapcsolat az egyes levelek között, és a korrelációs függvények faktorizálódnak. Amennyiben a twist-csoport nem triviális, akkor az összes olyan fedést figyelembe kell venni, amelyek monodrómia-csoportja része a twist-csoportnak, és ezek járulékait fel kell összegezni. Amennyiben twist-terek korrelátorait vizsgáljuk, akkor elágazó fedéseket is figyelembe kell venni, ahol az elágazási pontok körüli monodrómiát a twist-terek határozzák meg.

2.5. Szimmetrikus szorzatok

A permutációs orbifoldok elméletének egyik fontos alkalmazása az ún. *szimmetrikus szorzatok* elmélete, amely fontos szerepet játszik a másodkvantált húrok vizsgálatában [37, 36, 16, ?, 70, 71]. Ez annak a speciális esetnek felel meg, amikor a permutációs orbifold definíciójában szereplő Ω mértékcsoport tartalmazza az alrendszerek összes permutációját, azaz a megfelelő fokszámú S_n szimmetrikus csoporttal egyenlő. A maximális mértékszimmetria folyománya, hogy a szimmetrikus szorzatok szerkezete teljes általánosságban tárgyalható.

A szimmetrikus szorzatok elméletét Dijkgraaf et al. [37] vizsgálta elsőnek, a másodkvantált húrok leírásával kapcsolatban. Arra a fontos felismerésre jutottak, hogy a szimmetrikus szorzatokat nem egyenként, külön-külön minden egyes n-re, hanem egyszerre érdemes tárgyalni, megfelelő generátorfüggvények bevezetésével. Lényegében a szimmetrikus szorzatok Hilbertterének szerkezetét vizsgálták, és ez alapján meghatározták a szimmetrikus szorzatok úgynevezett elliptikus génuszainak (ezek a partíciós függvény szuperszimmetrikus változatai) generátorfüggvényét, amelyben megjelentek az analitikus számelméletből jól ismert *Hecke-operátorok*[6].

Hogy a fenti elképzelés eredményre vezet, vagyis a szimmetrikus szorzatok fizikai jellemzőinek generátorfüggvényeire zárt kifejezések adódnak, egy általános kombinatorikai eredmény, az *exponenciális azonosság*[7] következménye [16]. Az exponenciális azonosság segítségével nemcsak a szimmetrikus szorzatok partíciós függvényeinek, illetve elliptikus génuszainak generátorfüggvényei állíthatók elő zárt alakban, hanem az összes releváns fizikai jellemző. Sőt, az egyes szimmetrikus szorzatok jellemzőire is viszonylag egyszerű, zárt

[6] A Hecke-operátorok moduláris formákon ható, egymással kommutáló önadjungált operátorok [1, 35, 69, 78]. Legfontosabb tulajdonságuk, hogy egy moduláris formához asszociált Dirichlet-sor akkor és csak akkor rendelkezik Euler-szorzat előállítással, ha közös sajátfüggvénye az összes Hecke-operátornak.

[7] Az exponenciális azonosságot és a szimmetrikus szorzatok elméletében betöltött szerepét a A.3 Függelékben ismertetjük.

kifejezések adódnak, megmagyarázva többek között a Hecke-operátorok megjelenését a szimmetrikus szorzatok elméletében.

A szimmetrikus szorzatok viszonylagos népszerűsége az elméletnek a húrelmélet másodkvantálásában betöltött szerepével magyarázható. Mint arra Dijkgraaf et al. rámutatott [37], az azonos objektumok megkülönböztethetetlenségének kvantumelméleti alapelve miatt egy N húrból álló konfiguráció dinamikáját a $\mathcal{C} \wr S_N$ szimmetrikus szorzat írja le, ha egyetlen húr dinamikáját a $\mathcal{C}$ elmélet jellemzi. Dijkgraaf ismerte fel [36], hogy a fenti választás mellett még pontosan egy alternatíva létezik, diszkrét torziót vezetve be: ennek fontos ismérve, hogy – legalábbis az alkalmazásokban legfontosabb tórusz partíciós függvények esetén – a diszkrét torziós együtthatók zárt, univerzális alakban megadhatók, lehetővé téve a generátorfüggvények felösszegzését ebben az esetben is, bár az eredmények bonyolultabb alakot öltenek, mint a torziómentes esetben [16]. Diszkrét torzió esetén is megjelennek a Hecke-operátorok analogonjai a kifejezésekben, bár mind alakjuk, mind algebrájuk bonyolultabb, mint a klasszikus esetben.

3. fejezet

Alaptulajdonságok

Mint azt a bevezető fejezetben hangsúlyoztuk, a permutációs orbifoldok elméletének legjelentősebb érdeme, hogy az elmélet explicite megoldható, vagyis az orbifold modellt jellemző bármely mennyiség elvileg meghatározható a twist-csoport, vagyis a permutációs mértékszimmetriák Ω csoportja, és az orbifoldizáció előtti elmélet ismeretében. Erre a konstrukció geometriai interpretációja, a fedőterek elméletével való kapcsolat szolgáltat lehetőséget. Ezen túlmenően még két olyan alapvető tulajdonsággal rendelkeznek a permutációs orbifoldok, amelyek döntő szerepet játszanak az elmélet különféle alkalmazásaiban: ezek a *tranzitivitás* és az *univerzalitás*. Jelen fejezet célja eme alaptulajdonságok ismertetése.

3.1. A tranzitivitás

A tranzitivitás a permutációs mértékszimmetriáknak egy olyan alaptulajdonsága, amely messze túlmutat a permutációs orbifoldok elméletén. Röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy konform térelmélet permutációs orbifoldjának egy permutációs orbifoldja maga is az eredeti elméletnek egy – megfelelő twist-csoporttal képzett – permutációs orbifoldja: másszóval a konstrukció iterálása nem vezet ki az eredeti elmélet permutációs orbifoldjainak köréből.

$$\underbrace{\left.\begin{array}{cccc} \boxed{\mathcal{C}} & \boxed{\mathcal{C}} & \cdots & \boxed{\mathcal{C}} \\ \boxed{\mathcal{C}} & \boxed{\mathcal{C}} & \cdots & \boxed{\mathcal{C}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\mathcal{C}} & \boxed{\mathcal{C}} & \cdots & \boxed{\mathcal{C}} \end{array}\right\} \Omega_2}_{\Omega_1}$$

3.1. ábra. Az ábrán látható dobozok az egyes alrendszereket jelölik, melyek dinamikáját a $\mathcal{C}$ elmélet írja le. Az alrendszerek egy téglalap alakú elrendezést alkotnak, melynek oszlopait Ω_1, míg sorait Ω_2 permutálja. Minden egyes sorban külön-külön orbifoldizálva Ω_1 twist-csoporttal, az egyes sorok dinamikáját a $\mathcal{C} \wr \Omega_1$ elmélet írja le. A sorokat orbifoldizálva Ω_2 twist-csoporttal a $(\mathcal{C} \wr \Omega_1) \wr \Omega_2$ elmélet adódik, amely a tranzitivitás miatt megegyezik $\mathcal{C} \wr (\Omega_1 \wr \Omega_2)$-vel, amint az egyszerűen belátható a koszorú-szorzat hatásának ismeretében.

Magától értetődik, hogy a tranzitivitás tulajdonsága a fent kifejtett kvalitatív elképzelés kvantitatív, a konkrét számolásokban felhasználható – és gyakran fel is használandó – megfogalmazását adja.

Emlékezzünk vissza a permutációs orbifold definíciójára az 2. fejezetből: egy olyan objektumot tekintünk, amely több független és egymástól megkülönböztethetetlen alrendszerből áll, és ahol minden egyes alrendszer dinamikáját egy kétdimenziós konform térelmélet írja le: jelöljük ezt $\mathcal{C}$-vel. Ezek után rendezzük el az egyes alrendszereket az 3.1 ábrán látható módon egy négyzetes alakzatba, és jelöljük az elrendezés sorainak összességét X-szel, míg oszlopainak összességét Y-nal. Nyilván mind az X, mind az Y minden egyes eleme alrendszerek egy részhalmaza lesz, és maguk az egyes alrendszerek megfelelnek az $X \times Y$ Descartes-szorzat elemeinek. A következő lépésben tekintjük a sorok X halmazának egy $\Omega_2 < S_X$, és az oszlopok Y halmazának egy $\Omega_1 < S_Y$ permutációcsoportját. Megtehetjük, hogy minden egyes sorban orbifoldizálunk az Ω_1 twist-csoporttal: így egy olyan rendszerre jutunk, mely az egyes soroknak megfelelő, a $\mathcal{C} \wr \Omega_1$ permutációs orbifold által leírt dinamikájú alrendszerekből áll. Ezen alrendszerek továbbra is függetlenek és megkülönböztethetetlenek, következésképpen orbifoldizálhatunk az Ω_2 twist-csoporttal: az eredmény egy olyan rendszer, melyet a $(\mathcal{C} \wr \Omega_1) \wr \Omega_2$ permutációs orbifold ír le.

A döntő észrevétel, hogy a fenti eredményt megkaphatjuk egyetlen orbifoldizáció révén is! Valóban, gondoljuk meg, hogy első lépésben mértékszimmetriának tekintettük az oszlopok összes, Ω_1-be tartozó permutációját, de különböző sorok esetén más-más permutációt választhattunk, vagyis tetszőleges $\phi : X \to \Omega_1$ leképezésekkel jellemezhettük a mértékszimmetriákat. A második lépésben megengedtük a sorok tetszőleges Ω_2-beli elemmel való permutálását, de ez már nem befolyásolhatta az egyes sorokon belüli sorrendet. A koszorú-szorzatok definíciójával összevetve (lásd A.1 Függelék) könnyen átlátható, hogy ez esetben a mértékcsoport az $\Omega_1 \wr \Omega_2$ koszorú-szorzat, vagyis az orbifoldizáció eredménye $\mathcal{C} \wr (\Omega_1 \wr \Omega_2)$. A fenti gonodolatmenet alapján világos, hogy ez ugyanaz az elmélet, mint a két lépcsőben történt orbifoldizáció eredménye, azaz[1]

$$(\mathcal{C} \wr \Omega_1) \wr \Omega_2 = \mathcal{C} \wr (\Omega_1 \wr \Omega_2) \ . \tag{3.1}$$

Ez a permutációs orbifoldok alapvető jelentőségű *tranzitivitási tulajdonsága* [8].

Vegyük észre, hogy a tranzitivitás indoklása során sehol sem kellett hivatkozni az alrendszerek dinamikájának speciális – konform invariáns – voltára. Ez annak a megnyilvánulása, hogy a tranzitivitási tulajdonság elméleteknek

[1] Megjegyezzük, hogy a koszorú-szorzat jelölés permutációs orbifoldokra történő alkalmazásának pont az a fő indoka, hogy ekkor lesz a tranzitivitás formális megfogalmazása a legegyszerűbb.

egy, a permutációs orbifoldokénál sokkal tágabb osztályán belül érvényes: teljesülésének feltétele az, hogy a rendszert alkotó egyes alrendszerek megkülönböztethetetlenek egymástól – ellenkező esetben nem is beszélhetnénk permutációs mértékszimmetriákról –, és ezen felül még függetlenek is (különben az orbifoldizáció során olyan új kölcsönhatások generálódnának, amelyek elméleti leírása nem ismert).

Egy másik fontos észrevétel a tranzitivitással kapcsolatban, hogy bár látszólag magától értetődő a teljesülése permutációs orbifoldokban, valójában egy erős konzisztencia-feltétel, amely jelentős mértékben megszorítja ezen elméletek belső szerkezetét, különösen akkor, ha együtt alkalmazzuk a rövidesen tárgyalandó univerzalitási tulajdonsággal. A tranzitivitás megszorító jellegének illusztrálására példaként hozható fel a permutációs orbifold primér tereinek számát megadó kifejezés (az ezzel kapcsolatos kérdésekre még visszatérünk a 5.1 alfejezetben): amennyiben a $\mathcal{C}$ elméletnek s darab primér tere van (ez a királis szimmetria-algebra irreducibilis ábrázolásainak száma), akkor a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold primér tereinek számát a

$$P_{\Omega}\left(s\right) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{(x,y,z)\in\Omega^{\{3\}}} s^{|\mathcal{O}(x,y,z)|} \tag{3.2}$$

kifejezés adja meg, amely az s-nek egy, az Ω twist-csoporttól függő polinomja. A fenti képletben $\Omega^{\{3\}}$ az Ω elemeiből képezhető kommutáló elem-hármasok összességét, míg $\mathcal{O}\left(x,y,z\right)$ az $\left(x,y,z\right)$ kommutáló elem-hármas által generált permutációcsoport pályáinak halmazát jelöli (és mint az általában szokásos, $|X|$ jelöli az X halmaz számosságát).

A tranzitivitási tulajdonság alapján a $\left(\mathcal{C} \wr \Omega_1\right) \wr \Omega_2$ permutációs orbifold megegyezik a $\mathcal{C} \wr \left(\Omega_1 \wr \Omega_2\right)$ permutációs orbifolddal, következésképpen ugyanannyi primér terük van. De a fentiek alapján az első esetben a primér terek száma

$$P_{\Omega_2}\left(P_{\Omega_1}\left(s\right)\right) \ ,$$

hiszen $\mathcal{C} \wr \Omega_1$-nek $P_{\Omega_1}\left(s\right)$ primér tere van, míg a második esetben a primér terek száma

$$P_{\Omega_1 \wr \Omega_2}(s) \ ,$$

és e két mennyiségnek meg kell egyeznie tetszőleges Ω_1 és Ω_2 permutációcsoportokra és az s változó tetszőleges (pozitív egész) értékeire. Következésképpen teljesülnie kell az alábbi nem-triviális függvényegyenletnek:

$$P_{\Omega_1 \wr \Omega_2} = P_{\Omega_2} \circ P_{\Omega_1} \ , \tag{3.3}$$

ahol P_Ω jelöli a (3.2) kifejezessel definiált polinomot, és $\circ$ a függvények kompozícióját[2]. A koszorú-szorzatok, illetve az orbifold-transzformáció elméletének segítségével belátható, hogy a (3.3) összefüggés valóban teljesül tetszőleges Ω_1 és Ω_2 permutációcsoportokra (lásd A Függelék).

3.2. Az univerzalitás

Legyen A egy konform térelméletekre értelmezett jellemző mennyiség, például a (Virasoro) centrális töltés vagy a tórusz partíciós függvény, de nem csak numerikus jellemzőkre lehet gondolni, lehet például A az elmélet Hilbert-tere, vagy az elmélethez asszociált moduláris ábrázolás, stb. Az A jellemző minden egyes $\mathcal{C}$ konform térelméletben felvesz egy $A(\mathcal{C})$ értéket. Amennyiben Ω egy tetszőleges permutációcsoport, akkor vizsgálhatjuk az A jellemző értékét a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifoldban, amit $A(\mathcal{C} \wr \Omega)$ jelöl. A $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold minden jellemzője kifejezhető az orbifoldizáció előtti $\mathcal{C}$ elmélet jellemzőinek segítségével, többek között $A(\mathcal{C} \wr \Omega)$ is. Az univerzalitás e kifejezéseknek egy alapvető tulajdonságát írja le: az Ω twist-csoporttól és a $\mathcal{C}$ elmélettől való függés szétcsatolódik. A precíz megfogalmazás szerint, az A

[2] Mivel egy véges fokszámú polinomnak csak véges sok gyöke van az algebra alaptétele szerint, ezért ha két polinom azonos értékű minden pozitív egésznél, akkor szükségszerűen megegyeznek egymással.

mennyiségnek a permutációs orbifoldban felvett értéke az alábbi alakot ölti:

$$A\left(\mathcal{C}\wr\Omega\right)=\mathcal{A}^{\Omega}\left[A_1\left(\mathcal{C}\right),A_2\left(\mathcal{C}\right)\ldots\right]\ , \tag{3.4}$$

ahol $A_1, A_2, \ldots$ konform elméletekre jellemző mennyiségek, $A_i\left(\mathcal{C}\right)$ az A_i jellemző értéke a $\mathcal{C}$ elméletben, míg $\mathcal{A}^{\Omega}$ egy, az Ω twist-csoporttól és a konkrét A jellemzőtől függő, de a $\mathcal{C}$ elmélettől teljesen független funkcionális kapcsolatot jelöl. Az A_i jellemzők összességét nevezzük az A multipletjének, ez kizárólag az A-tól függ. Az univerzalitás lényege, hogy a twist-csoporttól való függés kizárólag az $\mathcal{A}^{\Omega}$ funkcionális reláció alakjában jelenik meg, és ez adott A és Ω esetén explicite meghatározható, míg az orbifoldizáció előtti $\mathcal{C}$ elmélet csak az $A_i\left(\mathcal{C}\right)$ értékeken keresztül befolyásolja a permutációs orbifold jellemzőit.

A tranzitivitás teljesen általános volta követeli meg a fenti bonyolult megfogalmazást, de a lényeg könnyen illusztrálható néhány egyszerű példán. Tekintsük elöször a c centrális töltést: egy permutációs orbifold centrális töltése egyenlő az orbifoldizáció előtti elmélet centrális töltésének és a twist-csoport fokának a szorzatával

$$c\left(\mathcal{C}\wr\Omega\right)=c\left(\mathcal{C}\right)\deg\Omega\ . \tag{3.5}$$

Ebben az esetben az univerzalitás megfogalmazásában fellépő kifejezések különösen egyszerű alakot öltenek: a centrális töltés önmaga multipletje, és a funkcionális reláció nem más, mint az Ω fokával való szorzás.

Kevésbé triviális a tórusz partíciós függvény esete. Ekkor, mint azt majd látni fogjuk a 4. fejezetben, a $\mathcal{C}\wr\Omega$ permutációs orbifold Z^{Ω} tórusz partíciós függvénye [8]

$$Z^{\Omega}\left(\tau\right)=\frac{1}{|\Omega|}\sum_{(x,y)\in\Omega^{\{2\}}}\prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)}Z\left(\tau_{\xi}\right)\ ,$$

ahol $Z\left(\tau\right)$ a $\mathcal{C}$ elmélet tórusz partíciós függvénye, $\Omega^{\{2\}}$ a kommutáló Ω-beli elempárok halmaza, $\mathcal{O}\left(x,y\right)$ az $\left(x,y\right)$ elempár által generált permutációcsoport pályáinak összessége,

$$\tau_\xi = \frac{\mu_\xi \tau + \kappa_\xi}{\lambda_\xi} \ , \tag{3.6}$$

és $\lambda_\xi, \mu_\xi, \kappa_\xi$ a ξ pálya bizonyos numerikus jellemzői (lásd A.2 Függelék). A fenti képletből kitűnik, hogy a tórusz partíciós függvény is önmaga multipletje, viszont ez esetben a $\mathcal{Z}^\Omega$ funkcionális reláció már messze nem triviális, és a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ csoport orbifold-transzformációjával áll kapcsolatban (lásd A.2 Függelék). Ez egyben arra is magyarázat, hogy miért nem tekinthető egyszerűen leképezésnek a funkcionális reláció, hiszen a fenti képletben a Z partíciós függvényt transzformált τ_ξ argumentumoknál kell kiértékelni.

Bár az eddigi két példában a vizsgált mennyiségek önmaguk multipletjét alkották, ez egyáltalán nem jellemző általában. Például, az egynél magasabb génuszú, irányítható kompakt felületek partíciós függvényei együttesen alkotnak egy multipletet, nem külön-külön. Hasonlóképpen, a Klein-amplitúdó multipletje tartalmazza - magán a Klein-amplitúdón kívül - a tórusz partíciós függvényt.

Az utóbbi példa arra is rávilágít, hogy abból a tényből, hogy A szerepel B multipletjében, jelöljük ezt a relációt $A \prec B$-vel a továbbiakban, még nem következik, hogy B is szerepel A multipletjében, vagyis nem teljesül automatikusan $B \prec A$. Ennek ellenére az azonos multipletbe tartozás szoros kapcsolatot jelez két fizikai jellemző között: valóban, a tranzitivitási tulajdonság felhasználásával megmutatható, hogy a $\prec$ reláció tranzitív, vagyis $A \prec B$ és $B \prec C$ esetén $A \prec C$ is igaz, más szóval ha B eleme C multipletjének, akkor B multipletjének minden egyes tagja is eleme C multipletjének. Továbbá az is igaz, hogy $\prec$ reflexív, azaz minden jellemző benne van a saját multipletjében.

Az alkalmazások szempontjából meghatározó jelentőségű a permutációs orbifoldok univerzalitási tulajdonsága: általa válik lehetővé, hogy általános jellegű megállapításokat tegyünk a permutációs orbifoldok szerkezetére vonatkozóan, hiszen az univerzalitás biztosítja, hogy az orbifoldizáció előtti elmélet csak jól ellenőrzött körülmények között befolyásolja a modell tulajdonságait. Elvileg minden egyes A mennyiségnek meghatározható a multipletje, illetve az $\mathcal{A}^{\Omega}$ funkcionális relációk konkrét alakja minden Ω permutációcsoport esetén, vagyis fix Ω és változó $\mathcal{C}$ esetén is leírható a $\mathcal{C} \wr \Omega$ szerkezete. Ez a tény döntő jelentőséggel bír az orbifold-kovariancia elvének alkalmazásaiban.

Az univerzalitás a korábban ismertetett geometriai kép következménye. Tekintsünk ugyanis egy A mennyiséget, és vizsgáljuk meg az A által felvett értéket egy permutációs orbifoldban. Az általános geometriai kép szerint az A-hoz hozzárendelhető egy geometriai objektum, és ennek fedései határozzák meg az $A(\mathcal{C} \wr \Omega)$ egyes járulékait. Az összes olyan fedésre kell összegezni – megfelelő súlyozással –, melyek monodrómia-csoportja része az Ω twist-csoportnak. Az alapvető észrevétel, hogy az Ω twist-csoport csak itt lép be a képbe: se az egyes fedések, se a hozzájuk tartozó járulékok nem függnek Ω-tól. Másszóval a twist-csoport szerepe pusztán annyi, hogy megszorítja azon fedések halmazát, melyre összegezni kell: ezért Ω-tól csak a funkcionális reláció alakja függhet. Másfelől a $\mathcal{C}$ elmélettől való függés csak ott jelentkezik, amikor az egyes fedéseknek megfelelő fizikai jellemzőket értékeljük ki, ezért a $\mathcal{C}$-től és Ω-tól való függés valóban a (3.4) képlet által leírt módon csatolódik szét.

4. fejezet

A partíciós függvények szerkezete

A szimmetria-algebra mellett egy kétdimenziós konform térelmélet talán legfontosabb jellemzője az elmélet (tórusz) partíciós függvénye, amely meghatározza az elmélet spektrumát, vagyis az elméletben előforduló operátorok skála-dimenzióit. A tórusz partíciós függvény valójában csak első tagja általánosított partíciós függvények egy végtelen sorozatának. A jelen fejezetben először áttekintünk néhány, a partíciós függvényekre vonatkozó fontos ismeretet, majd tárgyaljuk a permutációs orbifoldok partíciós függvényeinek szerkezetét, illusztrálva a korábbi fejezetekben ismertetett általános elvek működését.

4.1. Partíciós függvények a konform térelméletben

Egy konform térelmélet Hilbert-terén ábrázolódik a konform csoport, mint a szimmetriacsoport részcsoportja. Két dimenzióban a konform csoport Lie-algebrája végtelen dimenziós, ezt nevezzük *Virasoro-algebrának*: ezt olyan egész számokkal indexelt L_n operátorok feszítik ki, melyek csererelációja

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{c}{12}\left(n^3 - n\right)\delta_{n,-m} \tag{4.1}$$

alakú, ahol a c jelöli a *centrális töltést*, amely az összes L_n-nel kommutál[1]. Valójában a Virasoro-algebrának két, egymással kommutáló kópiája ábrázolódik a Hilbert-téren, a holomorf és anti-holomorf szabadsági fokok szétcsatolódása miatt (ami végső soron a heterotikus elméletek létezésének oka), de mint az szokásos, általában csak a holomorf részt fogjuk figyelembe venni. A centrális töltés egy irreducibilis ábrázolásban – a Schur-lemma miatt – egy számmal való szorzás, és a szokásos szuperszelekciós szabály szerint csak azonos centrális töltésű ábrázolások fordulhatnak elő egy adott elméletben, mitöbb, a holomorf és anti-holomorf rész centrális töltésének meg kell egyeznie, vagyis c értéke az elmélet egyik fontos globális jellemzője.

A konform térelméletben szokásos radiális kvantálásban az időfejlesztő operátor egy nyújtás, melynek generátora a Virasoro-algebra két (holomorf és anti-holomorf) kópiájának nullamódusa segítségével fejezhető ki, ennek megfelelően a *partíciós függvényt* a

$$Z(q, \overline{q}) = (q\overline{q})^{-\frac{c}{24}}\, \mathrm{Tr}\left(q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}\right) \tag{4.2}$$

kifejezéssel értelmezzük, ahol q és $\overline{q}$ formális változók. Látható, hogy e definíció szerint a partíciós függvény az L_0 és $\overline{L}_0$ Virasoro-generátorok spektrumát jellemzi.

Cardy mutatott rá [?], hogy a partíciós függvénynek a fenti, Hamilton-formalizmuson alapuló interpretációján túlmenően létezik egy Lagrange-formalizmusra támaszkodó interpretációja is, mint egy vákuum-vákuum amplitúdó tórusz geometriában. Ebben a megközelítésben a q értékét a kétdimenziós tórusz metrikája, pontosabban annak konform ekvivalencia-osztálya

[1] Ez valójában a konform csoport Lie-algebrájának egy centrális bővítése, hogy figyelembe vehessük a projektív ábrázolások lehetőségét.

határozza meg, melyet egy $\tau \in \mathbb{H}$ számmal, a moduláris paraméterrel jellemezhetünk (lásd B Függelék), és a kapcsolatot q és τ között

$$q = \exp(2\pi i\tau) \quad , \quad \overline{q} = \exp(-2\pi i\overline{\tau}) \tag{4.3}$$

adja meg. Ebben az értelemben a partíciós függvény a τ moduláris paraméter függvényének tekinthető.

Mint ismeretes, a τ moduláris paraméter nem az 1 génuszú $\mathcal{M}_1$ modulus teret, hanem a $\mathcal{T}_1$ Teichmüller-teret koordinátázza. Ez azt jelenti, hogy egy

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{4.4}$$

moduláris transzformációval – ahol $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ – egymásba átvihető moduláris paraméterek konform ekvivalens metrikákat írnak le. Mivel konform invariáns térelméletben a fizikai mennyiségek csak a metrika konform ekvivalencia-osztályától függhetnek, adódik a *modulárinvariancia* követelménye: a $Z(\tau)$ partíciós függvény invariáns a (4.4) alakú moduláris transzformációkra [?].

Megjegyezzük, hogy bár a modulárinvariancia követelménye a fenti gondolatmenet alapján triviálisnak tűnik, viszont az eredeti (4.2) definíció alapján egyáltalán nem nyilvánvaló: valójában egy nagyon erős megszorítást jelent a konzisztens konform térelméletek spektrumára vonatkozóan.

A geometriai interpretáció miatt szokás $Z(\tau)$-t *tórusz partíciós függvénynek* is nevezni[2]. Ez egyben megnyitja az utat az általánosított partíciós függvények értelmezéséhez, hiszen a vákuum-vákuum amplitúdó bármely háttérmetrikában értelmezhető. Mivel az amplitúdó csak a metrika konform ekvivalencia-osztályától függhet, ezért – irányítható felületekre korlátozva figyelmünket – a g génusz minden egyes értékére egy függvényt kapunk a megfelelő

[2] A partíciós függvényt az irodalomban gyakran $Z(\tau, \overline{\tau})$-val jelölik, ahol a $\overline{\tau}$-tól való explicit függés kihangsúlyozása azt kívánja jelezni, hogy a partíciós függvény *nem* holomorf módon függ τ-tól.

$\mathcal{M}_g$ modulus téren, ezt nevezzük *g génuszú partíciós függvénynek.* A fentiekből nyilvánvaló, hogy $Z(\tau)$ pont az 1 génuszú partíciós függvény, míg a 0 génuszú partíciós függvény egy szám (melynek értékét egyértelműen meghatározzák a degenerált metrikák esetén érvényes aszimptotikus viselkedést leíró úgynevezett faktorizációs összefüggések). $g > 1$ esetben a g génuszú partíciós függvényt célszerű a megfelelő $\mathcal{T}_g$ Teichmüller-téren értelmezett függvénynek tekinteni, amely invariáns a leképezési osztályok hatására nézve[3]. A magasabb génuszú partíciós függvények fontos szerepet játsznak például a húrelméletben, ahol a magasabb rendű kvantumkorrekciókat írják le, de nagy hátrányuk, hogy a $g = 1$ esettel szemben mindmáig nem létezik (4.2)-hez hasonló operátoros interpretációjuk, ami lehetővé tenné egyszerű számolásukat.

A magasabb génuszú partíciós függvények külön-külön való kezelése helyett célszerű bevezetni az *általánosított partíciós függvény* fogalmát: ez az összes kétdimenziós metrika konform ekvivalencia-osztályain értelmezett azon függvény, amely egy adott metrikához hozzárendeli a vákuum-vákuum amplitúdó értékét az adott háttérben. Ez az általánosított $\mathcal{Z}$ partíciós függvény az összes Teichmüller-tér unióján van értelmezve, és a g génuszú partíciós függvény nem más, mint $\mathcal{Z}$ megszorítása $\mathcal{T}_g$-re. Bevezetésének egyik motivációja az, hogy a 3.2 alfejezet szóhasználatával élve önmaga alkot egy multipletet – a tórusz partíciós függvényhez hasonlóan –, amint azt rövidesen látni fogjuk.

4.2. Permutációs orbifoldok partíciós függvényei

A fentiek után térjünk rá a permutációs orbifoldok partíciós függvényeinek vizsgálatára. Elsőként az általánosított partíciós függvény alakját adjuk meg, majd az orbifold-transzformációval fennálló kapcsolatot fogjuk ismertetni, végül az általános eredményeket specializáljuk a különösen fontos $g = 1$ esetre.

[3] Ez a magasabb génuszú modulárinvariancia követelménye.

A Teichmüller-tér Fricke-koordinátázását fogjuk használni (lásd B.3 Függelék), amikor a g génuszú Teichmüller-tér pontjai $\tau : \Pi_g \to \mathrm{Aut}(\Sigma_g)$ beágyazások konjugált osztályainak felelnek meg, ahol Σ_g jelöli a g génuszú felületek univerzális fedőfelületét, és Π_g a fundamentális csoportjukat. Mint ismeretes, ekkor a leképezési osztályok Γ_g csoportja azonosítható a Π_g külső automorfizmusainak csoportjával, és ezek hatása a Fricke-koordinátára egyszerű kompozíció. A $\mathcal{Z}$ általánosított partíciós függvényt a τ Fricke-koordináta függvényének fogjuk tekinteni a továbbiakban.

Tekintsünk egy $\mathcal{Z}$ partíciós függvénnyel rendelkező $\mathcal{C}$ konform térelméletet, egy Ω permutációcsoportot, és a g génuszú Teichmüller-tér egy $\tau \in \mathcal{T}_g$ pontját. Feladatunk a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold $\mathcal{Z}^\Omega$ általánosított partíciós függvénye értékének meghatározása a τ pontban. Amint azt a 2. fejezetben ismertettük, az orbifold partíciós függvényének meghatározásához összegezni kell a világlepedő összes, megfelelő monodrómiájú fedésére. Mivel egy vákuum-vákuum amplitúdót tekintünk, ezért twist-terek (amelyek vágásokat eredményeznének) nem lépnek fel, így csak a világlepedő nemramifikált fedéseire kell összegezni, melyek monodrómia-csoportja része az Ω twist-csoportnak. Ezen fedések jellemezhetők monodrómia-hatásuk alapján, amely nem más, mint egy $\phi : \Pi_g \to \Omega$ homomorfizmus (lásd B.2 Függelék). A ϕ hatás $\xi \in \mathcal{O}(\phi)$ pályái felelnek meg a fedés összefüggő komponenseinek, és a τ Fricke-koordináta megszorítása a ξ pálya (bármely pontjának) stabilizátorára adja meg a megfelelő összefüggő komponens τ_ξ Fricke-koordinátáját. Az egyes összefüggő komponensek járulékai összeszorzódnak, mivel ezek diszjunkt világlepedőknek felelnek meg. Mindezt figyelembevéve az alábbi kifejezést kapjuk [10]:

$$\mathcal{Z}^\Omega(\tau) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\phi : \Pi_g \to \Omega} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(\phi)} \mathcal{Z}(\tau_\xi) \ , \tag{4.5}$$

ahol a twist-csoport rendjével való osztás az Ω-invariáns állapotokra történő projekció következménye. A fenti eredmény teljes általánosságban írja le a permutációs orbifoldok partíciós függvényeinek szerkezetét.

A (4.5) eredmény jól szemlélteti az univerzalitást (lásd 3. fejezet): a $\mathcal{C}$ elmélet választásától kizárólag a $\mathcal{Z}$ partíciós függvény függ (4.5) jobb oldalán, míg az Ω twist-csoport – a normálási faktortól eltekintve – csak a homomorfizmusokra való összegzésben szerepel, ami a megfelelő funkcionális reláció alakját befolyásolja. Mivel a $\mathcal{Z}$-n kívül nem lép fel más fizikai jellemző a képletben, ezért levonhatjuk a következtetést, hogy az általánosított partíciós függvény önmagában alkot egy multipletet.

A (4.5) képlet szoros analógiát mutat az orbifold-transzformáció (A.8) definíciójával. A kapcsolat az uniformizációs tétel segítségével érthető meg (lásd B Függelék). Ekkor az egyes konform ekvivalencia-osztályokat – vagy ami ugyanaz, komplex struktúrákat – uniformizáló csoportjuk segítségével paraméterezzük (ami pont a Fricke-koordináta képe), így az általánosított partíciós függvényt tekinthetjük úgy is, mint ami az uniformizáló csoportok halmazán van értelmezve. Az uniformizáló csoport izomorf a felület fundamentális csoportjával, és véges indexű részcsoportjai a felület összefüggő, véges fokú fedéseit uniformizálják. Ezen megfontolások figyelembevételével az orbifold $\mathcal{Z}^{\Omega}$ általánosított partíciós függvényének értéke a G uniformizáló csoporton – vagyis ezen csoport által uniformizált felületen – az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{Z}^{\Omega}(G) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\phi: G \to \Omega} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(\phi)} \mathcal{Z}(G_{\xi}) \ , \tag{4.6}$$

ahol G_{ξ} a $\xi \in \mathcal{O}(\phi)$ pálya stabilizátora. Összevetve ezt az eredményt az (A.8) képlettel arra a fontos következtetésre jutunk, hogy

$$\mathcal{Z}^{\Omega} = \mathcal{Z} \wr \Omega \, , \tag{4.7}$$

azaz *a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold partíciós függvénye megegyezik a $\mathcal{C}$ partíciós függvényének orbifold-transzformáltjával.*

A fenti megállapítás az elmélet egyik legfőbb eredménye. Általa lehetővé válik az orbifold-transzformáció elméletének alkalmazása, többek között azonnal adódik a tranzitivitás teljesülése (lásd 3. fejezet) az orbifold-transzformáció megfelelő tulajdonságából. Az általános eredmények jobb megértése érdekében vizsgáljuk meg külön az alkalmazások szempontjából legfontosabb 1 génuszú alesetet, vagyis a tórusz partíciós függvényt. $g = 1$ esetén a Fricke-koordináta a τ moduláris paraméterrel azonosítható, és a $\mathcal{Z}$ megszorítása a $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}$ Teichmüller-térre a $Z(\tau)$ tórusz partíciós függvény. Mivel egy tórusz minden véges fokú, nemramifikált, összefüggő fedése maga is egy tórusz (annak megfelelően, hogy a tórusz $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ fundamentális csoportjának minden véges indexű részcsoportja izomorf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-vel, lásd A.2 Függelék), ezért (4.5) ez esetben az alábbi alakot ölti:

$$Z^{\Omega}(\tau) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\phi:\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to\Omega} \prod_{\xi\in\mathcal{O}(\phi)} Z(\tau_\xi) \ , \tag{4.8}$$

ahol τ_ξ jelöli a ξ pályának megfelelő tórusz moduláris paraméterét. A (A.2) Függelékben ismertetett módon a ϕ homomorfizmus jellemezhető egy kommutáló $(x, y) \in \Omega^{\{2\}}$ permutációpárral, míg egy ξ pálya stabilizátora a

$$H_\xi = \begin{pmatrix} \mu_\xi & \kappa_\xi \\ 0 & \lambda_\xi \end{pmatrix}$$

HNF-fel jellemzett részcsoport. Mivel a τ moduláris paraméterű tóruszt a $z \mapsto z + \tau$ és $z \mapsto z + 1$ transzlációk által generált csoport uniformizálja, ezért a H_ξ HNF által jellemzett részcsoportot a $z \mapsto z + \mu_\xi\tau + \kappa_\xi$ és $z \mapsto z + \lambda_\xi$ transzlációk generálják, amely konjugáció erejéig megegyezik a $z \mapsto z + \frac{\mu_\xi\tau+\kappa_\xi}{\lambda_\xi}$ és $z \mapsto z + 1$ által generált csoporttal: következésképpen egy

$$\tau_\xi = \frac{\mu_\xi\tau + \kappa_\xi}{\lambda_\xi} \tag{4.9}$$

moduláris paraméterű tóruszt uniformizál. Mindent összevetve, az alábbi alakot kapjuk az orbifold tórusz partíciós függvényére [8]:

$$Z^{\Omega}\left(\tau\right)=\frac{1}{|\Omega|}\sum_{(x,y)\in\Omega^{\{2\}}}\prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)}Z\left(\frac{\mu_{\xi}\tau+\kappa_{\xi}}{\lambda_{\xi}}\right). \tag{4.10}$$

A fenti kifejezésekből kiviláglik, hogy az általánosított partíciós függvényre tett megállapítások a tórusz partíciós függvényre is vonatkoznak, azaz önmaga multipletjét alkotja, és a permutációs orbifold tórusz partíciós függvénye orbifold-transzformációval számolható (ezen állítások semelyike sem igaz egynél magasabb, de rögzített génuszú partíciós függvényekre). Vegyük azt is észre, hogy (4.10) egy teljesen explicit, könnyen számolható kifejezést ad a permutációs orbifold tórusz partíciós függvényére. Összevetve a (4.10) és (2.3) képleteket azt kapjuk, hogy a partíciós függvényben a twistelt szektorok járulékai a

$$Z\left(x,y|\tau\right)=\prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)}Z\left(\frac{\mu_{\xi}\tau+\kappa_{\xi}}{\lambda_{\xi}}\right) \tag{4.11}$$

alakot öltik.

5. fejezet

Királis karakterek, moduláris adatok és fúziós szabályok

Egy konform térelmélet alapvető jellemzői közé tartoznak a primér terek királis karakterei, az ezek transzformációs szabályát leíró moduláris adatok, illetve a primér terek konform családjai közötti csatolásokat megszorító fúziós szabályok. Ezek a jellemzők szoros összefüggésben állnak egymással, például a Verlinde-formula lehetőséget nyújt a fúziós szabályok meghatározására a moduláris adatok ismeretében. Jelen fejezet célja annak ismertetése, hogy miként határozhatók meg ezen fontos mennyiségek permutációs orbifoldokra.

5.1. Primér terek és karaktereik

A *primér tér* fogalma alapvető a konform térelméletben. A legáltalánosabb megfogalmazás szerint primér tér egy olyan téroperátor, mely a vákuumból az elmélet valamely szektorának legalacsonyabb konform súlyú állapotát kelti. Mivel az elmélet szektorai a (maximálisan kiterjesztett királis) szimmetria-algebra irreducibilis ábrázolásainak felelnek meg, ezért gyakran azonosítják a primér tereket ezen ábrázolásokkal. Másfelől, minthogy a szimmetria-algebra irreducibilis ábrázolásai megfeleltethetők az elmélethez asszociált moduláris tenzorkategória egyszerű objektumainak, ezért gyakran ez utóbbiakat nevezik primér tereknek. Persze mindhárom definíció egyazon fogalom más-más aspektusát ragadja meg.

A primér terek kiemelkedő jelentőségét az indokolja, hogy az összes többi téroperátor leszármaztatható belőlük szimmetriatranszformációk segítségével, ezért a primér terek korrelátorainak ismeretében az összes többi tér korrelációs függvényeit meghatározhatjuk pusztán szimmetriamegfontolások révén: vagyis a szimmetria-algebra és a primér terek korrelátorai egyértelműen jellemzik az elméletet. Ez a jellemzés akkor válik különösen hatékonnyá, amennyiben az elmélet *racionális*, vagyis csak véges sok primér tere van.

A primér tereknek több jellemzőjük létezik, ezek legfontosabbika a *konform súly*, amely a primér tér nyújtásokra való érzékenységét méri. A konform súlyok valóban alapvető jellemzők: ismeretükben meghatározott a (megfelelően normált) primér terek összes kétpont-függvénye, és a hárompont-függvények is egy, az operátorszorzat kifejtéssel kapcsolatos multiplikatív konstans erejéig. Fontos tudnivaló, hogy racionális elméletben a konform súlyok – csakúgy, mint a centrális töltés – racionális számok, maga az elnevezés is erre a tényre vezethető vissza.

A konform súly mellett egy primér tér legfontosabb jellemzője a *királis karaktere*. Emlékezzünk vissza, hogy a p primér tér az elmélet egy $\mathcal{H}_p$ szektorának legalacsonyabb súlyú állapotát kelti a vákuumból: karaktere egy olyan komplex függvénye a $\tau \in \mathbb{H}$ felső félsíkbeli változónak, amely a

$$\chi_p(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_p}\left(q^{L_0 - \frac{c}{24}}\right) \tag{5.1}$$

formulával van értelmezve, ahol c az elmélet centrális töltése, L_0 a Virasoro-algebra nullmódusa, míg $q = \exp(2\pi i\tau)$. Vegyük észre, hogy a q változó függvényében kifejezve a karakter

$$\chi_p = q^{h_p - \frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \tag{5.2}$$

alakú, ahol h_p jelöli a p primér tér konform súlyát, míg az a_n együtthatók nemnegatív egész számok (az L_0 sajátértékeinek multiplicitásai). Hogy az (5.2) képlet jobb oldalán szereplő összegben a q-nak csak egész hatványai szerepelnek abból következik, hogy egy adott szektoron belül az L_0 sajátértékei csak egész számban különbözhetnek egymástól.

A királis karakterek alapvető információt hordoznak az elméletről. Azon felül, hogy meghatározzák az L_0 sajátértékeinek degenerációját az egyes szektorokban, az elmélet Hamilton- és Lagrange-féle leírásának összehasonlításából következik, hogy az elmélet tórusz partíciós függvénye előállítható a királis karakterekben kvadratikus kifejezésként:

$$Z(\tau) = \sum_{p,q} M_{pq} \chi_p(\tau) \overline{\chi_q(\tau)} \,, \tag{5.3}$$

ahol az M_{pq} nemnegatív egész együtthatók által alkotott mátrixot szokás az elmélet modulárinvariánsának nevezni. Klasszikus példa modulárinvariánsra – amely bármilyen szimmetria-algebra mellett létezik – a *diagonális invariáns*, amikor M az egységmátrix. A konform térelmélet egyik leghíresebb eredménye, mely Cappelli, Itzykson és Zuber nevéhez fűződik, az $SU(2)$ Wess–Zumino-modellek modulárinvariánsainak *ADE osztályozása* [28].

A permutációs orbifoldok elméletének egyik alapkérdése a következő: tekintsünk egy $\mathcal{C}$ racionális elméletet, és képezzük annak egy Ω twist-csoportú $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifoldját. Hogyan osztályozhatjuk a $\mathcal{C} \wr \Omega$ primér tereit, és hogyan határozhatjuk meg e primér terek királis karaktereit?

A primér terek osztályozása azon az egyszerű észrevételen alapszik, hogy egy holomorf elmélet permutációs orbifoldja (definíció szerint) egy holomorf orbifold, és a holomorf orbifoldok primér tereinek osztályozása ismert: egy-egyértelmű kapcsolat áll fenn a primér terek és a twist-csoport duplájának irreducibilis ábrázolásai között [39, 38, 3, 4]. Másrészt a primér terek osztályozása összhangban kell legyen a 3. fejezetben tárgyalt tranzitivitás tulajdonságával. Megmutatható, hogy e két feltétellel konzisztens egyetlen megoldás a következő: a permutációs orbifold primér terei egy-egyértelmű kapcsolatban állnak az Ω twist-csoport pályáival azon $\mathcal{I}_\Omega$ halmazon, melynek elemei olyan (p,ϕ) párok, ahol p egy leképezés a twist-csoport X tartóhalmazából a $\mathcal{C}$ elmélet primér tereinek I halmazába, míg ϕ a p leképezés Ω_p stabilizátora duplájának egy irreducibilis karaktere [8, 11].

A fenti leíráshoz szükséges hozzáfűzni néhány értelmező megjegyzést. Amennyiben $\Omega < S_X$ egy X-en ható permutációcsoport és I egy tetszőleges halmaz, akkor adott az Ω-nak egy természetes hatása az X-ből I-be vivő leképezések I^X halmazán: $p \in I^X$ és $\omega \in \Omega$ esetén $\omega p = p \circ \omega^{-1}$. Erre a hatásra nézve a $p \in I^X$ leképezés stabilizátora

$$\Omega_p = \{\omega \in \Omega \,|\, p \circ \omega = p\} \ . \tag{5.4}$$

Másrészt, amennyiben $\omega \in \Omega$ és ϕ az Ω_p duplájának egy irreducibilis karaktere, akkor a

$$\omega^{\#}\phi\,(x,y) = \phi\,(x^\omega, y^\omega) \tag{5.5}$$

képlettel értelmezett $\omega^{\#}\phi$ a $\mathcal{D}\,(\Omega_{\omega p})$ csoportduplának lesz egy irreducibilis karaktere. Ezáltal az Ω-nak egy jól definiált permutációs hatását kapjuk a (p,ϕ) párok $\mathcal{I}_\Omega$ halmazán, és eme hatás pályáinak felelnek meg a permutációs orbifold primér terei. A konkrét számolásokban ezen pályákat valamely pontjukkal reprezentáljuk: természetesen, a fizikai mennyiségek kifejezései nem függhetnek a reprezentánsok megválasztásától.

A primér terek osztályozása azonnal lehetőséget nyújt annak a kérdésnek a megválaszolására, hogy hány primér tere van a permutációs orbifoldnak: ez a fontos adat határozza meg például a moduláris ábrázolás dimenzióját. Amennyiben a $\mathcal{C}$ elméletnek s darab primér tere van (vagyis a fenti jelöléssel $|I| = s$), akkor elemi csoportelméleti megfontolásokból következik, hogy a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold primér tereinek számát a

$$P_\Omega\,(s) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{(x,y,z)\in\Omega^{\{3\}}} s^{|\mathcal{O}(x,y,z)|} \tag{5.6}$$

kifejezés adja, ahol $\Omega^{\{n\}}$ jelöli az Ω csoport elemeiből összeállítható, páronként kommutáló n-esek összességét, míg $x \in \Omega^{\{n\}}$ esetén $\mathcal{O}(x)$ az x elemei által generált részcsoport pályáinak halmaza[1].

A primér terek osztályozásának ismeretében már megfogalmazható a kérdés: mi az orbifold egyes primér tereinek királis karaktere? Mivel a primér terek a tórusz partíciós függvény alkotóelemei, ezért a permutációs orbifold királis karaktereit a tórusz fedéseinek segítségével határozhatjuk meg. A konkrét válasz a következő: tekintsük a permutációs orbifold egy olyan primér terét, melynek megfelelő pálya reprezentánsa (p,ϕ), ahol $p \in I^X$ és ϕ az Ω_p stabilizátor duplájának egy irreducibilis karaktere. Ezen primér tér királis karakterét a

$$\chi_{(p,\phi)}(\tau) = \frac{1}{|\Omega_p|} \sum_{(x,y)\in\Omega_p^{\{2\}}} \overline{\phi(x,y)} \prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)} \omega_{p(\xi)}^{-\frac{\kappa_\xi}{\lambda_\xi}} \chi_{p(\xi)}\left(\frac{\mu_\xi\tau+\kappa_\xi}{\lambda_\xi}\right) . \tag{5.7}$$

kifejezés adja [8]. Az ebben a képletben szereplő mennyiségek nagy részét már korábbról ismerjük (lásd 4. fejezet), ezért csak azok magyarázatára térünk ki, amelyek újak. Mivel (5.7)-ben csak azon (x,y) kommutáló párokra összegzünk, amelyek mindkét tagja stabilizálja a $p \in I^X$ leképezést, ezért a p lokálisan konstans az összes $\xi \in \mathcal{O}(x,y)$ pályán, vagyis az összes ilyen ξ-hez a $\mathcal{C}$ elmélet egy jól meghatározott $p(\xi)$ primér terét rendeli. Másfelől, mivel adott $p \in I$ esetén ω_p a primér tér exponencializált konform súlyát jelöli (lásd (5.12) képlet), ezért az ω_p tört hatványait a

$$\omega_p^{a/b} = \exp\left(2\pi i \frac{a}{b}\left(h_p - c/24\right)\right) \tag{5.8}$$

képlettel értelmezzük.

Megmutatható, hogy az (5.7) képlet jobb oldalán álló mennyiség jól definiált, vagyis független a (p,ϕ) reprezentáns választásától. Mivel a $\mathcal{C}$ elmé-

[1]Megjegyezzük, hogy $P_\Omega(s)$ nem más, mint a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ csoport $\mathcal{Z} = s$ konstans osztályfüggvényének orbifold-transzformáltja (lásd A Függelék).

let királis karakterei teljes mértékben meghatározzák az orbifold karaktereit, ezért az univerzalitási tulajdonsággal kapcsolatban a 3. fejezetben bevezetett szóhasználat szerint a *karaktervektor*, vagyis a királis karakterek összessége, önmaga multiplettje. Persze az orbifold karaktervektora és az eredeti elmélet karaktervektora közötti funkcionális reláció konkrét alakja bonyolult módon függ az Ω twist-csoporttól.

Az (5.2) képlet szerint a konform súlyt a karakter q szerinti kifejtésének legalacsonyabb exponense adja meg. Figyelembe véve, hogy a permutációs orbifold centrális töltése a $\mathcal{C}$ elmélet centrális töltésének és a twist-csoport fokának, azaz tartóhalmaza számosságának szorzatával egyenlő (lásd (3.5) képlet), az (5.7) alapján meg lehet határozni a konform súlyokat. Mivel ebben a kifejtésben előfordulhatnak véletlen kiejtések, ezért nem adható meg egyszerű zárt kifejezés a konform súlyokra, bár meghatározásuk nem jelent gondot konkrét modellekben.

5.2. Moduláris adatok és Λ-mátrixok

A nyolcvanas évek végének egyik legfontosabb, leginkább Moore és Seiberg nevéhez köthető felismerése volt, hogy – mai szóhasználattal élve – minden racionális konform térelmélethez hozzárendelhető egy moduláris tenzorkategória [82, 2]. A modern megközelítés szerint a tenzorkategória az elsődleges, hiszen ismerete – néhány, a tenzorkategóriával kapcsolatos algebrai adattal kiegészítve – már teljesen meghatározza az elméletet, lehetővé téve a fizikai jellemzők (korrelációs és partíciós függvények, operátorszorzat kifejtések, határfeltételek és defektvonalak, stb) meghatározását, legalábbis elvi szinten [54, 55, 52, 76].

Egy moduláris tenzorkategória igen bonyolult matematikai objektum: szerencsére, a legfontosabb kérdések tekintetében viszonylag egyszerűen jellemezhető néhány numerikus adattal. Ezen numerikus adatokat szokás két, S-sel és T-vel jelölt unitér mátrixba kódolni, melyek sorait és oszlopait a konform elmélet primér terei – a moduláris tenzorkategória egyszerű objektumai – indexelik. E két mátrix együttese alkotja a moduláris tenzorkategória (vagy a megfelelő konform térelmélet) *moduláris adatait* [72, 57, 17].

Tetszőlegesen választott mátrixok nem szolgáltatnak konzisztens moduláris adatokat. A legfontosabb szükséges feltételeket, amit S-nek és T-nek ki kell elégítenie, az úgynevezett *Verlinde-tételben* szokás összefoglalni [85, 72]:

1. a T mátrix (a *Dehn-twist*) véges rendű és diagonális;

2. az S mátrix szimmetrikus, azaz
$$S_{pq} = S_{qp} \ ;$$

3. az S mátrix négyzete a *töltéskonjugáció* operátora, azaz
$$\left[S^2\right]_{pq} = \delta_{p,\overline{q}} \ ,$$
ahol $\overline{q}$ jelöli a q primér tér töltéskonjugáltját;

4. teljesül az
$$STS = T^{-1}ST^{-1} \tag{5.9}$$
moduláris reláció;

5. létezik az S mátrixnak egy olyan, általában 0-val indexelt sora, amelynek minden eleme pozitív (unitér elméletben 0 a vákuum);

6. a primér terek *fúziós szabályai* kifejezhetők a
$$N_{pqr} = \sum_w \frac{S_{pw}S_{qw}S_{rw}}{S_{0w}} \tag{5.10}$$
Verlinde-formula [85] segítségével, többek között a formula jobb oldalán szereplő kifejezés értéke csak nemnegatív egész szám lehet.

A fentiekben felsorolt eredmények képezik a racionális konform térelméletek moduláris adataival kapcsolatos ismereteink alapjait. Fontos leszögezni, hogy a Verlinde-tételben szereplő feltételek szükségesek, de nem elégségesek: könnyen megadható olyan mátrixpár, amely kielégíti a Verlinde-tételt, bár nem felel meg konzisztens moduláris adatnak[2].

Gyakran szerepel az irodalomban az a nem egészen helytálló állítás, hogy a moduláris adatokat a primér terek királis karaktereinek moduláris transzformációs szabálya határozza meg. A precíz összefüggés a következő: amennyiben $\chi_p(\tau)$ jelöli a p primér tér királis karakterét, továbbá S és T az elmélet moduláris adatait, akkor a

$$\begin{aligned} \chi_p\left(\frac{-1}{\tau}\right) &= \sum_q S_{pq}\chi_q(\tau) \\ \chi_p(\tau+1) &= \sum_q T_{pq}\chi_q(\tau) \end{aligned} \tag{5.11}$$

függvényegyenletek teljesülnek, melyek konzisztenciáját az (5.9) moduláris reláció biztosítja[3]. A T Dehn-twist diagonális volta következtében ez azt jelenti, hogy $\chi_p(\tau+1) = \omega_p\chi_p(\tau)$, ahol szokás szerint ω_p jelöli a T mátrix sajátértékeit. Figyelembe véve a királis karakterek (5.2) alakját azt kapjuk, hogy

$$\omega_p = \exp\left(2\pi i\left(h_p - \frac{c}{24}\right)\right) , \tag{5.12}$$

vagyis az ω_p sajátérték a p primér tér exponencializált konform súlya.

Az (5.11) függvényegyenletnek fontos következménye, hogy a moduláris adatok az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-nek egy ábrázolását határozzák meg a királis karakterek

[2]Mint a későbbiekben látni fogjuk (6.3 alfejezet), a moduláris mátrixelemek rendkívül erős számelméleti feltételeket elégítenek ki. Emellett ismertek más szükséges feltételek is, például az úgyenevezett *trace identitások* [14].

[3]A függvényegyenlet azért nem alkalmas a moduláris adatok meghatározására, mert – ritka kivételektől eltekintve – a királis karakterek lineárisan összefüggnek: például töltéskonjugált terek karakterei megegyeznek.

terén. Valóban, $\tau \mapsto \frac{-1}{\tau}$ és $\tau \mapsto \tau + 1$ transzformációk generálják a

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

alakú törtlineáris transzformációk összességét, amely nem más, mint az 1 génuszú leképezési osztályok csoportjának, vagyis az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ moduláris csoportnak a hatása az 1 génuszú Teichmüller-téren, azaz a felső félsíkon [1, 35]. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ így meghatározott ábrázolását hívják az elmélet *moduláris ábrázolásának*.

Felvetődik a kérdés, hogyan határozhatók meg egy permutációs orbifold moduláris adatai. A kérdés két részre osztható: egyrészt a T Dehn-twist sajátértékeinek, másrészt az S mátrixelemeinek meghatározására.

Mint azt fentebb láttuk, a Dehn-twist sajátértékei nem mások, mint a primér terek exponencializált konform súlyai: de ez utóbbiak meghatározhatók a királis karakterek ismeretében. Bár a konform súlyokra nincs egyszerű zárt kifejezés, exponencializáltjaikra érvényes az

$$\omega_{\langle p,\phi\rangle} = \frac{1}{d_\phi} \sum_{x\in\Omega_p} \phi\,(x,x) \prod_{\xi\in\mathcal{O}(x)} \omega_{p(\xi)}^{\frac{1}{|\xi|}} \tag{5.13}$$

összefüggés, ahol $d_\phi = \sum_x \phi\,(x,1)$ a ϕ karakterrel jellemzett irreducibilis ábrázolás dimenziója, és a többi jelölés hasonló értelmű, mint az (5.7) képletben. Vagyis a permutációs orbifold T mátrixa egyszerűen meghatározható az orbifoldizáció előtti elmélet T mátrixából.

Bonyolultabb a helyzet az S mátrix esetén. A királis karaktereket megadó (5.7) képlet segítségével az alábbi eredmény vezethető le:

$$S_{\langle p,\phi\rangle}^{\langle q,\psi\rangle} = \frac{1}{|\Omega_p|\,|\Omega_q|} \sum_{\substack{z\in\Omega \\ x,y\in\Omega_p\cap\Omega_{zq}}} \overline{\phi\,(x,y)\psi\,(y^z,x^z)} \prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)} \Lambda_{p(\xi)}^{zq(\xi)} \left(\frac{\kappa_\xi}{\lambda_\xi}\right) . \tag{5.14}$$

Vegyük szemügyre e képlet egyes tagjait! A bal oldalon az S-nek a permutációs orbifold $\langle p,\phi\rangle$ és $\langle q,\psi\rangle$ primér terei közötti mátrixeleme szerepel. A jobb oldalon, a normalizációs együtthatótól eltekintve, szerepel egy összeg tetszőleges $z \in \Omega$-ra, illetve olyan x, y párokra, melyek mindkét tagja eleme a Ω_p és Ω_{zq} stabilizátorok közös részének[4]. Mivel mind x, mind y stabilizálja a p és zq leképezéseket, ezért ezen leképezések lokálisan konstansok az x és y által generált permutációcsoport pályáin, és $p(\xi)$ illetve $zq(\xi)$ jelöli az általuk felvett értéket a $\xi \in \mathcal{O}(x, y)$ pályán. κ_ξ és λ_ξ jelöli a kommutáló (x, y) permutációpár pályáinak szerkezetét jellemző szokásos invariánsokat (lásd A.2 Függelék). Végül megjelennek a képletben az úgyenevezett Λ-mátrixok[11]: ezek egy racionális $r \in \mathbb{Q}$ paramétertől függő $\Lambda(r)$ mátrixsereget alkotnak, melynek sorait és oszlopait a primér terek indexelik.

A következőképpen értelmezzük a Λ-mátrixokat: legyen $r = \frac{k}{n}$ alakú, ahol k és n relatív prímek, és az n nevező pozitív. Ekkor léteznek olyan a és b egész számok, hogy $kb - an = 1$, másszóval az $m = \left(\begin{smallmatrix} k & a \\ n & b \end{smallmatrix}\right)$ mátrix eleme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-nek[5]. A $\mathcal{C}$ elmélet moduláris adatai meghatározzák az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-nek egy ábrázolását, a moduláris ábrázolást, amely az m moduláris transzformációhoz egy M mátrixot rendel. Ekkor definíció szerint $\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)$ mátrixeleme a p és q primér terek között

$$\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)_p^q = \omega_p^{\frac{k}{n}} M_p^q \omega_q^{\frac{b}{n}}\,, \tag{5.15}$$

ahol az ω_p exponencializált konform súlyok tört hatványainak értelmezését az (5.8) képlet adja. Bevezetve a $r^\star = \frac{b}{n}$ jelölést, a definíció formálisan

$$\Lambda(r) = T^r M T^{r^\star} \tag{5.16}$$

alakban írható.

Belátható, hogy a fenti definíció értelmes, azaz a $\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)$ mátrix független a konstrukció során felhasznált a, b számpár konkrét választásától. Mitöbb az

[4]Ez a feltétel biztosítja, hogy a $\phi(x, y)$ és $\psi(y^z, x^z)$ kifejezések értelmesek. Vegyük azt is észre, hogy a fenti kifejezések eltünnek ha $xy \neq yx$.

[5]Az a és b egészek létezése annak következménye, hogy k és n relatív prím.

is megmutatható, hogy $\Lambda(r)$ csak az r szám törtrészétől függ, vagyis r-ben periodikus,

$$\Lambda(r+1) = \Lambda(r) \ . \tag{5.17}$$

Zérus argumentum esetén a Λ-mátrix a moduláris S mátrixot adja vissza, azaz

$$\Lambda(0) = S \ , \tag{5.18}$$

továbbá az is belátható, hogy a Λ-mátrixok eleget tesznek az alábbi két azonosságnak:

$$\Lambda(r^\star)_p^q = \Lambda(r)_q^p \tag{5.19}$$

és

$$\Lambda(1-r)_p^q = \overline{\Lambda(r)_{\overline{p}}^q} \, , \tag{5.20}$$

ahol szokás szerint $\overline{p}$ jelöli a p primér tér töltéskonjugáltját. A fenti összefüggések alkotják a Λ-mátrixokkal kapcsolatos legfontosabb ismereteket [11].

Mint láttuk, $r=0$ esetén a Λ-mátrix az S mátrixra redukálódik. Elvileg bármely más racionális argumentum mellett kifejezhető a Λ-mátrix S-sel és T-vel, bár ez gyakran túl bonyolult gyakorlati szempontból. Egy fontos eset amikor még egyszerű összefüggést kapunk, ha r egy egész szám reciproka, ekkor

$$\Lambda\left(\frac{1}{n}\right) = T^{-\frac{1}{n}} S^{-1} T^{-n} S T^{-\frac{1}{n}} \ . \tag{5.21}$$

Térjünk vissza a permutációs orbifold S mátrixát megadó (5.14) formulához. Látjuk, hogy ebben explicit módon megjelennek az orbifoldizáció előtti $\mathcal{C}$ elmélet Λ-mátrixai különböző nemzérus argumentumoknál: következésképpen a permutációs orbifold S mátrixának meghatározásához elvileg szükség van az összes Λ-mátrix – vagy ami ezzel egyenértékű, az összes moduláris adat – ismeretére. Ez azt jelenti, hogy míg T önmaga alkot egy multipletet, addig S multipletjébe beletartozik T is (és ezáltal az összes Λ-mátrix). A lényeges eredmény az, hogy a permutációs orbifold moduláris adatait teljes mértékben meghatározzák az orbifoldizáció előtti elmélet moduláris adatai.

Megjegyezzük, hogy az S mátrixot megadó (5.14) képlet levezethető a királis karaketerek ismerete nélkül is: ekkor azt kell vizsgálni, hogy egy tórusz fedésein milyen moduláris transzformációt indukál egy, a fedés bázisán végrehajtott moduláris transzformáció [8].

5.3. Fúziós szabályok és twistelt dimenziók

Az olyan jellemzők mellett, mint a konform súlyok, királis karakterek és moduláris adatok, fontos szerepet játszanak a *fúziós szabályok*. Ezek adják meg három kiválasztott primér tér között a szimmetriákkal összeegyeztethető független csatolások számát. Ez többek közt azt is jelenti, hogy egy fúziós szabály zérus volta maga után vonja a megfelelő hárompont-függvény, illetve az operátorszorzat kifejtési együttható eltűnését. A fúziós szabályok lényegében a szimmetria-algebra irreducibilis ábrázolásai tenzorszorzatainak szerkezetét írják le[6]: ebben az értelemben a fúziós szabályok alapvető strukturális információt hordoznak az elméletről.

A konform térelmélet egyik leghíresebb, a matematika különböző területein is nagy visszhangot kiváltott eredménye az (5.10) Verlinde-formula, amely kapcsolatot teremt egy konform térelmélet fúziós szabályai és moduláris adatai között [85, 72]. Az (5.10) Verlinde-formula messzemenően általánosítható, ha bevezetjük a *holomorf blokkok* fogalmát: a holomorf faktorizáció következtében primér terek bármely génuszon számolt korrelációs függvénye előáll az adott génuszú Teichmüller-téren értelmezett holomorf függvények kvadratikus kifejezéseként, az ebben a kifejezésben fellépő holomorf függvényeket hívjuk az (adott génuszú) holomorf blokkoknak. Például az 1 génuszú 0pont-függvény nem más, mint a tórusz partíciós függvény, és a megfelelő holomorf blokkok a királis karakterek. A $p_1, \ldots, p_n$ primér terek g génuszú

[6] Az itt fellépő tenzorszorzat fogalom messze nem triviális, és sok tekintetben eltér a véges dimenziós asszociatív algebráknál megismerttől [63].

korrelátorának holomorf blokkjai feszítik ki a $\mathcal{V}_g\left(p_1,\ldots,p_n\right)$ lineáris teret. Könnyen belátható, hogy

$$N_{pqr} = \dim \mathcal{V}_0\left(p,q,r\right) \ , \tag{5.22}$$

vagyis a fúziós szabályok a 0 génuszú hárompont-függvények lineárisan független holomorf blokkjainak számát adják meg. A Verlinde-formula általános alakja szerint [72]

$$\dim \mathcal{V}_g\left(p_1\ldots,p_n\right) = \sum_q S_{0q}^{2-2g} \prod_{i=1}^{n} \frac{S_{p_i q}}{S_{0q}} \ . \tag{5.23}$$

A permutációs orbifold moduláris adatait behelyettesítve az (5.23) képletbe megkapjuk az orbifold holomorf blokkjainak számát, speciálisan a fúziós szabályokat $g=0$ és $n=3$ esetén. Persze a naív behelyettesítésből adódó alakot még át kell alakítani, hogy valóban használható kifejezést kapjunk. Az eredmény legkompaktabb formája [11]

$$\dim \mathcal{V}_g\left(\left(p_1,\phi_1\right),\ldots,\left(p_n,\phi_n\right)\right) =$$

$$\frac{1}{|\Omega|} \sum_{\substack{z_1,\ldots,z_n\in\Omega \\ \theta\in\Omega_g(z_1p_1,\ldots,z_np_n)}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{\phi_i}\left(c_i^{z_i},x^{z_i}\right)}{|\Omega_{p_i}|} \prod_{\xi\in\mathcal{O}(\theta)} \mathcal{D}_\xi\left(z_1p_1,\ldots,z_np_n\right) \ . \tag{5.24}$$

Az (5.24) képletben szereplő mennyiségek a következő jelentéssel bírnak: $\Omega_g\left(p_1,\ldots,p_n\right)$ azon $\left(a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g,c_1,\ldots,c_n,x\right)$ rendezett, Ω elemeiből álló $2g+n+1$ hosszúságú sorozatok halmaza, amelyekre igaz, hogy

1. x kommutál az összes a_i, b_i, c_i elemmel;
2. $\prod_{i=1}^{g}\left[a_i,b_i\right]\prod_{j=1}^{n}c_j = 1$;
3. mind x, mind c_i stabilizálja p_i-t minden $i=1,\ldots,n$-re.

Adott $\theta \in \Omega_g(p_1,\ldots,p_n)$ esetén $\mathcal{O}(\theta)$ jelöli az a_i, b_i, c_i-k és x által generált részcsoport pályáinak összességét; μ_ξ a $\xi \in \mathcal{O}(\theta)$ pályában található x-pályák száma; $i = 1,\ldots,n$-re $\mathcal{O}_i^\xi$ a ξ-ben található $\langle x, c_i\rangle$ pályák halmaza; adott $\eta \in \mathcal{O}_i^\xi$ esetén κ_η a legkisebb nemnegatív egész, amelyre $x^{\kappa_\eta} c_i^{-|\eta|\mu_\xi/|\xi|}$ eleme az η stabilizátorának, és $p_i(\eta)$ a p_i leképezés (konstans) értéke az η pályán; végül

$$\mathcal{D}_\xi(p_1,\ldots,p_n) = \sum_{q\in I} S_{0q}^{(2-2g-n)\mu_\xi} \prod_{i=1}^{n} \prod_{\eta\in\mathcal{O}_i^\xi} \Lambda_q^{p_i(\eta)}\left(\frac{\mu_\xi\kappa_\eta}{|\xi|}\right) . \tag{5.25}$$

Bár a fenti eredmény rendkívül komplikált benyomást kelt, nagymértékben egyszerűsíthető az úgynevezett *twistelt dimenziók* fogalmának bevezetésével [11]. Ezeket egy g nemnegatív egész szám, illetve primér terek $p_1,\ldots,p_n$ és racionális számok $r_1,\ldots,r_n$ sorozatai jellemzik, és az ezen adatoknak megfelelő twistelt dimenziót

$$\mathcal{D}_g\begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n \\ r_1 & \ldots & r_n \end{pmatrix} = \sum_q S_{0q}^{2-2g} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Lambda(r_i)_q^{p_i}}{S_{0q}} \tag{5.26}$$

definiálja[7]. Amennyiben minden r_i karakterisztika zérus, akkor – felhasználva a Λ-mátrixok előző alfejezetben megismert tulajdonságait, illetve az (5.23) általánosított Verlinde-formulát – azt kapjuk, hogy a twistelt dimenzió megegyezik a megfelelő holomorf blokkok terének dimenziójával[8]:

$$\mathcal{D}_g\begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \dim \mathcal{V}_g(p_1\ldots,p_n) . \tag{5.27}$$

Fontos megjegyezni, hogy ellentétben a $\dim \mathcal{V}_g(p_1\ldots,p_n)$ dimenziókkal, amelyek mindig nemnegatív egészek, a twistelt dimenziók elvileg tetszőleges

[7] Az $r_1,\ldots,r_n$ racionális számokat szokás a twistelt dimenzió karakterisztikáinak, míg g-t a génuszának nevezni.

[8] Ez az összefüggés a twistelt dimenzió elnevezés magyarázata.

komplex értékeket vehetnek fel. Nagyon érdekes kérdés annak vizsgálata, hogy a moduláris adatok konzisztenciája milyen megszorításokat jelent a twistelt dimenziók lehetséges értékeire [14, 84].

Visszatérve a permutációs orbifold fúziós szabályait megadó (5.24) képletre, és összehasonlítva a twistelt dimenziók (5.26) definícióját az (5.25) kifejezéssel, arra a következtetésre jutunk, hogy a permutációs orbifold (általánosított) fúziós szabályai előállnak az orbifoldizáció előtti $\mathcal{C}$ elmélet twistelt dimenzióinak polinomiális kifejezéseiként. A 3.2 alfejezet terminológiája szerint a twistelt dimenziók alkotják a fúziós szabályok multipletjét, ez magyarázza szerepüket a permutációs orbifoldok elméletében. Mitöbb, a twistelt dimenziók összessége önmaga multipletje, vagyis a permutációs orbifold minden twistelt dimenziója kifejezhető az orbifoldizáció előtti elmélet twistelt dimenziói segítségével. Megjegyezzük, hogy a twistelt dimenzióknak létezik egy topológiai interpretációja is, amely fontos szerepet játszik a véges rendű leképezési osztályok ábrázolási operátorainak nyomait kifejező *trace formulák* vizsgálatában [14, 18].

5.4. Frobenius–Schur-indikátorok

Egy konform térelmélet primér tereit jellemző numerikus inavariánsok között fontos szerepet töltenek be a *Frobenius–Schur-indikátorok* [7]. Az eredeti értelmezés szerint ezek a kétpont-függvények szimmetriáját jellemzik. Egy adott p primér tér kétpont-függvénye csak akkor nem zérus, ha a primér tér megegyezik önmaga töltéskonjugáltjával, vagyis $p = \overline{p}$. Ebben az esetben még mindig két lehetőség adódik: a kétpont-függvény a braiding-operátor hatására vagy önmagába megy át, vagy előjelet vált. Az első esetben a primér tér ν_p Frobenius–Schur-indikátora $+1$, míg a másodikban -1, illetve értéke zérus, amennyiben $p \neq \overline{p}$. Mint azt a 6.2 alfejezetben látni fogjuk, az indikátorok határozzák meg a Klein-palack amplitúdó alakját diagonális modulárinvariáns esetén.

Döntő jelentőségű az a felismerés, hogy a Frobenius–Schur-indikátorok értékét teljes mértékben meghatározzák a moduláris adatok [7]. Megmutatható ugyanis, hogy

$$\nu_p = \sum_{q,r} N_{pqr} S_{0q} S_{0r} \left(\frac{\omega_q}{\omega_r}\right)^2 \ . \tag{5.28}$$

A fenti eredmény nemcsak egyszerű módszert szolgáltat az indikátorok számolására, de egy nemtriviális konzisztencia-feltételt is ad moduláris adatokra: az (5.28) képlet jobb oldalán szereplő mennyiségek csak a ± 1 és 0 értékeket vehetik fel!

Mivel a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold moduláris adatait ki tudjuk fejezni a $\mathcal{C}$ elmélet adataival, ezért az (5.28) segítségével az indikátorokat is meghatározhatjuk. Az így kapott bonyolult kifejezésből megfelelő átalakítások révén egy olyan alakra jutunk, amelyben már csak a $\mathcal{C}$ primér tereinek indikátorai szerepelnek. A végső eredmény az, hogy a $(p, \phi) \in \mathcal{I}_\Omega$ reprezentáns által jellemzett primér tér indikátora [9]

$$\nu_{(p,\phi)} = \frac{1}{|\Omega_p|} \sum_{(x,y) \in \Omega_p^{\langle 2 \rangle}} \overline{\phi\left(x, y^2\right)} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(x,y)} \mathcal{N}\left(p, \xi\right) \ , \tag{5.29}$$

ahol

$$\Omega_p^{\langle 2 \rangle} = \left\{ (x,y) \in \Omega^2 \,|\, x, y^2 \in \Omega_p, \ \ xy = yx^{-1} \right\} \ , \tag{5.30}$$

és $\mathcal{N}\left(p, \xi\right)$ jelentése a következő: az $xy = yx^{-1}$ feltételnek eleget tevő x és y permutációk által generált csoport $\xi \in \mathcal{O}\left(x, y\right)$ pályáin az x és y^2 által generált csoport vagy tranzitívan hat, vagy két, ξ_+-szal és ξ_--szal jelölt pályára bontja azt. Az első esetben $\mathcal{N}\left(p, \xi\right) = \nu_{p(\xi)}$ a $p\left(\xi\right)$ primér tér indikátora, míg a második esetben $\mathcal{N}\left(p, \xi\right)$ egyenlő 1-gyel ha $p\left(\xi_+\right)$ és $p\left(\xi_-\right)$ egymás töltéskonjugáltja, ellenkező esetben pedig zérus.

Vegyük észre, hogy az (5.30) képletben szereplő $xy = yx^{-1}$ feltétel nem más, mint a Klein-palack fundamentális csoportjának definiáló relációja (a generátorok szokásos megválasztása esetén), ami világos utalás a Klein-palack amplitúdó és a Frobenius–Schur-indikátorok kapcsolatára, amit részletesebben is megvizsgálunk majd a 6.2 alfejezetben.

6. fejezet

Orbifold-kovariancia és alkalmazásai

Az orbifold-kovariancia elve egy látszólag tautologikus állítás, amely azt mondja ki, hogy mivel egy konform térelmélet bármely permutációs orbifoldja maga is egy konzisztens konform térelmélet, ezért bármely olyan állítás, amely igaz minden konform térelméletre, szükségszerűen igaz minden permutációs orbifoldra is. Kombinálva a 3. fejezetben megismert alaptulajdonságokkal, az orbifold-kovariancia elve egy nagyon hatékony módszer a konform térelméletek mélyebb tulajdonságainak tanulmányozására, amint azt e fejezetben igyekszünk illusztrálni.

6.1. Az orbifold-kovariancia elve

Emlékezzünk vissza a 2. fejezetben tett fontos megállapításra: egy konzisztens konform térelmélet bármely permutációs orbifoldja maga is konzisztens konform térelmélet. Következésképpen, ha egy összefüggés teljesül bármely konform térelméletben, akkor teljesülnie kell bármely permutációs orbifoldban is. Ez a látszólag semmitmondó állítás valójában rendkívül hatékony eszközzé válik, ha összevetjük a 3. fejezetben ismertetett tulajdonságokkal, legfőképp az univerzalitással.

Az elv alkalmazásának szemléltetésére tegyük fel, hogy sikerül megmutatni két jellemző mennyiség, mondjuk A és B egyenlőségét a konform invariancia következményeként: persze feltesszük, hogy A és B különböző mennyiségek, vagyis a konform invariancia hiányában általában nem egyenlőek[1]. Ez azt jelenti, hogy teljesül

$$A(\mathcal{C}) = B(\mathcal{C}) \tag{6.1}$$

minden $\mathcal{C}$ konform térelméletre, ahol $A(\mathcal{C})$ jelöli az A, míg $B(\mathcal{C})$ a B értékét $\mathcal{C}$-ben. Az orbifold-kovariancia elve alapján a fenti egyenlőségnek teljesülnie kell a $\mathcal{C}$ bármely Ω twist-csoporttal képzett permutációs orbifoldjában, azaz tetszőleges Ω permutációcsoportra fennáll, hogy

$$A(\mathcal{C} \wr \Omega) = B(\mathcal{C} \wr \Omega)\ . \tag{6.2}$$

Viszont az univerzalitás révén tudjuk (lásd 3.2 alfejezet), hogy a (6.2) egyenlőség mindkét oldalán szereplő mennyiségek kifejezhetők a $\mathcal{C}$ elmélet jellemzői segítségével:

$$A(\mathcal{C} \wr \Omega) = \mathcal{A}^{\Omega}\left[A_1(\mathcal{C}), \ldots, A_n(\mathcal{C})\right] \tag{6.3}$$

és

$$B(\mathcal{C} \wr \Omega) = \mathcal{B}^{\Omega}\left[B_1(\mathcal{C}), \ldots, B_m(\mathcal{C})\right]\ , \tag{6.4}$$

ahol $A_1, \ldots, A_n$ az A, míg $B_1, \ldots, B_m$ a B jellemző multipletje. A fenti összefüggéseket figyelembe véve végül arra jutunk, hogy

$$\mathcal{A}^{\Omega}\left[A_1(\mathcal{C}), \ldots, A_n(\mathcal{C})\right] = \mathcal{B}^{\Omega}\left[B_1(\mathcal{C}), \ldots, B_m(\mathcal{C})\right]\ , \tag{6.5}$$

ami már a $\mathcal{C}$ elmélet jellmzői közötti új összefüggés. Másszóval, amennyiben (6.1) fennáll minden konform elméletben, akkor (6.5) is szükségszerűen teljesül tetszőleges Ω permutációcsoport esetén. Az $\mathcal{A}^{\Omega}$ és $\mathcal{B}^{\Omega}$ funkcioná-

[1]Például vehetjük A-nak a moduláris S mátrixot, míg B-nek annak transzponáltját: ezekről tudjuk, hogy egyenlőek minden konform térelméletben.

lis relációk univerzalitása, vagyis $\mathcal{C}$-től való függetlensége itt döntő szerepet játszik.

Bizonyos esetekben nem kapunk semmi érdemlegeset: (6.1) automatikusan maga után vonja (6.5) teljesülését. De az esetek döntő többségében új, nemtriviális összefüggésekre jutunk, amelyek száma elvileg végtelen, mivel Ω tetszőleges. Az elv fenti formájának alkalmazására a következő alfejezetben mutatunk majd példát. Szeretnénk hangsúlyozni, hogy nem csak (6.1) típusú egyszerű összefüggések esetén alkalmazható az elv: fizikai jellemzők közötti tetszőleges relációból új, más jellemzők közötti relációk származtathatók, lényegében mechanikus módon.

A fent ismertetett meggondolások alkotják az orbifold-kovariancia alkalmazásának alapját. Még hatékonyabb eszközhöz jutunk amennyiben az orbifold-kovariancia elvét egy reductio ad absurdum típusú gondolatmenettel társítjuk. Tegyük ugyanis fel, hogy bizonyos tulajdonság teljesülését akarjuk megmutatni konform térelméletekre. Ekkor egy olyan hipotétikus elméletből kiindulva, melyre nem teljesül az adott tulajdonság, gyakran kimutatható, hogy az elmélet egy megfelelően választott permutációs orbifoldja nem tesz eleget valamely már ismert konzisztencia-feltételeknek. Az orbifold-kovariancia elve alapján levonhatjuk a következtetést, hogy az eredeti elmélet se lehetett konzisztens, teljessé téve a reductio ad absurdumot. Ilyen típusú gondolatmenetre példa a kongruencia-részcsoport tulajdonság bizonyítása (lásd 6.3 alfejezet).

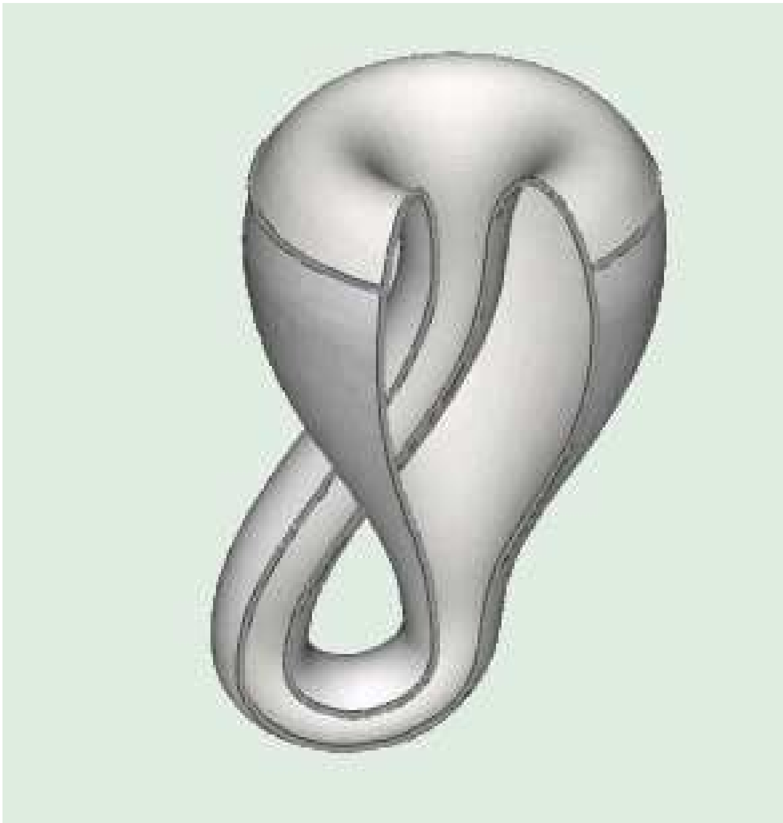
6.2. A Pradisi–Sagnotti–Stanev-sejtés

Eddigi vizsgálataink során a konform térelméleteket mindig csak irányítható felületeken tekintettük, pedig bizonyos alkalmazásokhoz elengedhetetlen a nemirányítható világlepedők figyelembevétele: ilyen például a nem irányított húrok dinamikájának leírása, modern szóhasználattal az orientifold projekciók kérdése. Természetesen egy nemirányítható felületen is értelmezhető a konform transzformációk fogalma, és egy konform invariáns térelmélet korrelátorainak a téridő metrikájának konform ekvivalencia-osztályától való függése. Első ránézésre problémát okoz, hogy megszűnik az irányítható esetben oly gyümölcsöző kapcsolat a komplex függvénytannal: egy komplex struktúra egy természetes irányítást határoz meg, így nemirányítható felületen nem értelmezhető. Mint látni fogjuk rövidesen, ez a nehézség csak látszólagos.

A nemirányítható felületek topológia osztályozása hasonlít az irányítható esethez: továbbra is egy nemnegatív egész szám, a g génusz különbözteti meg a felületeket, mely meghatározza a felület Euler-karakterisztikáját. Nulla génuszú a projektív sík, amelyen az összes Riemann-metrika konform ekvivalens, következésképpen ez az eset nem túl érdekes, hiszen a vákuum-vákuum amplitúdó mindössze egy szám, amelyet teljesen meghatároznak a szinguláris metrikákra érvényes faktorizációs összefüggések.

Az első nemtriviális eset $g = 1$-nek, a *Klein-palacknak* felel meg (6.1. ábra). Ez azért különösen fontos, mert ez határozza meg az orientifold projekciók járulékát a tórusz partíciós függvényhez. A leírás alapja az az észrevétel, hogy bármely nemirányítható felületnek létezik egy két levelű irányítható fedése, a felület úgynevezett *Schottky-duplája*. Mi több, a felület metrikája, pontosabban annak konform ekvivalencia-osztálya, indukál egy jól meghatározott metrikát a Schottky-duplán. Ezáltal lehetővé válik, hogy a nemirányítható felület metrikáját a Schottky-dupláján indukált metrika (konform ekvivalencia-osztálya) segítségével jellemezzük.

Fontos megjegyezni, hogy a Schottky-duplán indukált metrikák nem lehetnek akármilyenek: például a Klein-palack Schottky-duplája egy kétdimenziós tórusz, melynek metrikáját jellemző moduláris paraméter szükségszerűen tiszta képzetes, vagy legalábbis egy megfelelő moduláris transzformációval tiszta képzetessé tehető. Ez többek közt azt jelenti, hogy a Klein-palackon értelmezett metrikák konform ekvivalencia-osztályait nem egy komplex, hanem egy t valós paraméterrel különböztethetjük meg, így egy ilyen világlepedőn a vákuum-vákuum amplitúdó értéke – a $K(t)$ *Klein-amplitúdó* – szintén



6.1. ábra. A Klein-palack oldalmetszetben.

egy valós változó függvénye.

Természetes módon merül fel a kérdés, hogy a Klein-amplitúdó kapcsolatba hozható-e a már korábban megismert fizikai jellemzőkkel. Kiterjedt numerikus vizsgálatok eredményeként Pradisi, Sagnotti és Stanev fogalmazták meg azt a sejtést [74], hogy amennyiben az elmélet diagonális, vagyis tórusz partíciós függvénye előáll a primér terek királis karaktereinek abszolút értékei négyzetösszegeként,

$$Z(\tau) = \sum_p |\chi_p(\tau)|^2 \ , \tag{6.6}$$

akkor a Klein-amplitúdó kifejezhető a primér terek királis karaktereinek Frobenius–Schur-indikátorokkal súlyozott összegeként:

$$K(t) = \sum_p \nu_p \chi_p(it) \ . \tag{6.7}$$

Érdemes megemlíteni, hogy Pradisi et al. sejtésüket még a Frobenius–Schur-indikátorok fogalmának bevezetése előtt fogalmazták meg, explicit kifejezést adva a (6.7) összefüggésben szereplő együtthatókra, melynek megfelelő átalakításával az indikátorokat meghatározó (5.28) képlet adódik.

Az orbifold-kovariancia elvének első alkalmazása annak megmutatása volt, hogy az konzisztens a Pradisi–Sagnotti–Stanev-sejtéssel, ezáltal meggyőző evidenciát szolgáltatva a sejtés igaz voltára [9]. Tekintsük át röviden az idevezető gondolatmenetet.

A permutációs orbifoldokra vonatkozó általános elvek lehetővé teszik a Klein-amplitúdó számolását. Mivel egy vákuum-vákuum amplitúdóról van szó, ezért twist-terek nem lépnek fel, így a Klein-palack nemramifikált fedéseit kell vizsgálnunk. Ezek kétfélék lehetnek: egyrészt Klein-palackok (más metrikával), másrészt kétdimenziós tóruszok. Ennek megfelelően a Klein-amplitúdó nem önmagában alkot egy multipletet, hanem csak a tórusz partíciós függvénnyel együtt. Amennyiben K-val jelöljük a $\mathcal{C}$ konform térelmélet Klein-amplitúdóját, Z-vel a tórusz partíciós függvényét, és K^{Ω}-val a $\mathcal{C} \wr \Omega$ permutációs orbifold Klein-amplitúdóját, akkor a 2. és 4. fejezetekben ismertetett általános elvek alapján megmutatható, hogy

$$K^{\Omega}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\substack{x,y\in\Omega \\ xy=yx^{-1}}} \prod_{\xi\in\mathcal{O}(x,y)} K_{\xi}(t) \ , \tag{6.8}$$

ahol az összegzés a Klein-palack fundamentális csoportjából az Ω twist-csoportba képző homomorfizmusokra terjed ki (ezeket jellemzi a $xy = yx^{-1}$ feltételt kielégítő (x, y) pár), $\mathcal{O}(x, y)$ jelöli az x és y által generált permutációcsoport pályáinak összességét, és egy adott ξ pályára

$$K_\xi\left(t\right)=K\left(\frac{|\xi|}{\lambda_\xi^2}t\right) \tag{6.9}$$

illetve

$$K_\xi\left(t\right)=Z\left(\frac{|\xi|}{2\lambda_\xi^2}it\right) \tag{6.10}$$

attól függően, hogy a fedés ξ-nek megfelelő összefüggő komponense egy Klein-palack vagy egy tórusz: e két esetet az különbözteti meg, hogy az x és y^2 által generált csoport tranzitíven hat-e a ξ-n vagy sem. Mindkét esetben λ_ξ jelöli a ξ-ben található y^2 pályák (közös) hosszát.

A (6.8) képlet alapján számolható a permutációs orbifold Klein-amplitúdója. Most vizsgáljuk meg, hogy hogyan kapcsolódik ez az eredmény Pradisi et al. sejtéséhez. Mivel a Klein-amplitúdó multipletje tartalmazza a tórusz partíciós függvényt, ezért a 6.1 alfejezetben vázolt gondolatmenet egyik szereplője az

$$A=\begin{pmatrix} Z\left(\tau\right) \\ K\left(t\right) \end{pmatrix}$$

kétkomponensű mennyiség. A sejtés alapján ez bármely konform térelméletben egyenlő a

$$B=\begin{pmatrix} \sum_p\left|\chi_p\left(\tau\right)\right|^2 \\ \sum_p\nu_p\chi_p\left(it\right) \end{pmatrix}$$

mennyiséggel: az első komponensek egyenlősége abból adódik, hogy csak diagonális elméleteket tekintünk, míg a második komponensek egyenlősége maga a sejtés. Az orbifold-kovariancia elve szerint az $A=B$ egyenlőség fennáll minden permutációs orbifoldban. De a fentiek alapján meghatározható az A kifejezése egy tetszőleges Ω twist-csoportú orbifoldban, és a 5. fejezet ereményeinek felhasználásával a B mennyiségé is (hiszen mind a királis karakterek, mind a Frobenius–Schur-indikátorok kifejezése ismert, lásd (5.7) és (5.29) képleteket). A két kifejezés összehasonlításával, megfelelő átalakítások elvégzése után az a következtetés vonható le, hogy a Pradisi–Sagnotti–Stanev-sejtés konzisztens az orbifold-kovariancia elvével.

Persze a fenti gondolatmenet nem bizonyítja a sejtést, csak azt mutatja meg, hogy nem mond ellent az orbifold-kovariancia elvének. De ez már önmagában egy rendkívül erős érvnek tekinthető a sejtés igaz volta mellett.

6.3. A kongruencia-részcsoport tulajdonság

Az 1980-as évek második felében a konform térelmélet rohamos fejlődésen ment keresztül. Ekkor ismerték fel az elmélet máig meghatározó jelentőségű alapelveit, mint a holomorf faktorizáció vagy a modulárinvariancia, másrészt modellek egész sorát vizsgálták meg az újonnan kifejlesztett eszközök segítségével. Különös jelentőségre tettek szert a *racionális elméletek*[2]. Bár a konform térelméletek többsége nem racionális, mégis sok, az alkalmazások szempontjából fontos elmélet ebbe az osztályba esik. Egy másik indok a racionális elméletek iránti különös figyelemre az, hogy az őket definiáló végességi feltétel nagy mértékben egyszerűsíti a vizsgálatukat, például a holomorf blokkok terei, illetve a moduláris ábrázolás véges dimenziós ezen elméletekben. Sokáig élt a remény, hogy a racionális elméletek egyszerű elvek alapján osztályozhatóak, a Virasoro minimál-modellek mintájára. Bár a racionális elméletek osztályozása mindmáig megoldatlan feladat, kétségtelen tény, hogy ezen modell-osztályon belül van a legtöbb remény a sikerre.

Az egyes racionális elméletek moduláris adatainak analízise több alapvető felismeréshez vezetett, ezek közül a legfontosabbakat már áttekintettük a Verlinde-tétel tárgyalása során (lásd 5.2 alfejezet). Mivel a moduláris adatok az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ moduláris csoportnak egy ábrázolását határozzák meg a (5.9) moduláris reláció következtében, természetesen merül fel a kérdés, hogy mit lehet mondani eme *moduláris ábrázolás* tulajdonságairól. A konkrét modellek moduláris adatainak vizsgálata során erre vonatkozólag többféle hipotézis

[2]Emlékeztetőül, ezeket az jellemzi, hogy csak véges sok primér térrel rendelkeznek.

született: ezek egyike szerint a moduláris ábrázolás képe, vagyis az S és T által generált mátrixcsoport véges. Egy ennél sokkal erősebb sejtés szerint a moduláris ábrázolás magja egy *kongruencia-részcsoport*, azaz létezik olyan N pozitív egész, hogy a

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N \right\} \tag{6.11}$$

úgynevezett *principális kongruencia-részcsoport* minden egyes elemét az egységmátrix ábrázolja. Ez a híres, majd másfél évtizedig eldöntetlen kongruencia-részcsoport sejtés [46, 21, 32]. Mivel a principális kongruencia-részcsoport indexe véges, ezért a sejtés nyilván implikálja a moduláris ábrázolás képének végességét.

A kongruencia-részcsoport tulajdonság fennállását végül az orbifold-kovariancia elvének és az úgynevezett *Galois-hatás* elméletének kombinálásával sikerült belátni. A bizonyítás alapgondolatának megértéséhez először tekintsük át a Galois-hatás elméletének legfontosabb elemeit [34, 31, 32].

A korábban ismertetett Verlinde-tétel súlyos megszorításokat jelent a lehetséges moduláris adatokra. Mivel megfogalmazásában szerepel egy kitüntetett bázis, a királis karakterek bázisa, ezért nem csak az ábrázolási mátrixoknak, de azok egyes mátrixelemeinek is invariáns fizikai jelentés tulajdonítható, így értelmes az a kérdés, hogy mit lehet mondani az egyes mátrixelemek számelméleti tulajdonságairól.

Abból a tényből, hogy a (5.10) Verlinde-formula jobb oldalán szereplő mennyiségek egész számok, megmutatható, hogy ha tekintjük azt az F számtestet amit úgy kapunk, hogy a $\mathbb{Q}$ racionális számtesthez hozzávesszük az összes moduláris mátrix minden egyes mátrixelemét, akkor F a $\mathbb{Q}$-nak egy normális bővítése. Felhasználva az S mátrix szimmetriáját az is megmutatható, hogy az F egy ábeli bővítés, másszóval Galois-csoportja kommutatív. Kronecker és Weber híres tétele szerint a racionális számok minden ilyen bővítése *ciklotomikus*, vagyis létezik olyan N pozitív egész, hogy $F \subset \mathbb{Q}[\zeta_N]$, ahol $\zeta_N = \exp(2\pi i/N)$ egy primitív N-edik egységgyök [66]. A legkisebb, ennek a feltételnek eleget tevő N számot nevezzük az elmélet *konduktorának*. Világos a fentiekből, hogy a T Dehn-twist rendje osztja az N konduktort.

A $\mathbb{Q}[\zeta_N]/\mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportja jól ismert: elemei a σ_l *Frobenius-leképezések*, ahol l egy primitív maradékosztály modulo N (azaz egy olyan maradékosztály, melynek elemei relatív prímek N-nel), és a σ_l automorfizmus hatását a

$$\sigma_l(\zeta_N) = \zeta_N^l \tag{6.12}$$

képlet határozza meg. A Galois-csoport izomorf a primitív maradékosztályok $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ multiplikatív csoportjával [66].

Természetesen a σ_l Frobenius-leképezések automorfizmusai a $F/\mathbb{Q}$ bővítésnek is, ezért vizsgálhatjuk hatásukat a moduláris mátrixelemeken. Mivel T véges rendű és diagonális, így nemzérus mátrixelemei egységgyökök, ezért

$$\sigma_l(T) = T^l \ . \tag{6.13}$$

Az S mátrixelemeinek transzformációja már bonyolultabb, de a Verlinde-tétel alapján megmutatható, hogy minden l primitív maradékosztályra létezik olyan G_l mátrix, az úgynevezett *Galois-mátrix*, hogy

$$\sigma_l(S) = SG_l \tag{6.14}$$

teljesül. Az igazán lényeges felismerés az, hogy – megint csak a Verlinde-tétel következtében – a G_l Galois-mátrixok ortogonálisak és monomiálisak, vagyis minden egyes sorukban és oszlopukban csak egy nem-zérus elem szerepel, amelynek értéke csak ± 1 lehet [31].

A fent ismertetett eredmények képezik a Galois-hatás elméletének alapjait. Hangsúlyoznunk kell, hogy ezek mind a Verlinde-tétel következményei, vagyis teljesülnek minden konzisztens racionális elméletben. A kongruencia-részcsoport tulajdonság bizonyítása azon az észrevételen alapszik, hogy feltéve egy olyan racionális elmélet létezését, amely moduláris ábrázolásának magja nem kongruencia-részcsoport, akkor annak egy megfelelően választott permutációs orbifoldjában – ahol a twist-csoport $\mathbb{Z}_N$, az elmélet konduktorával megegyező rendű ciklikus permutáció által generált csoport – a Galois-mátrixok nem rendelkeznek a fent felsorolt tulajdonságokkal. Minthogy az orbifold-kovariancia elve szerint a permutációs orbifoldnak konzisztensnek kéne lennie, ezért teljes a reductio ad absurdum [13].

Valójában a fent vázolt gondolatmenet a kongruencia-részcsoport tulajdonságnál erősebb eredményekre vezet [13]. Többek közt lehetővé teszi a G_l Galois-mátrixok és a T Dehn-twist felcserélési szabályának meghatározását, melynek alakja

$$G_l^{-1} T G_l = \sigma_l^2 \left(T\right) \ . \qquad (6.15)$$

Ezen összefüggés következményeként megmutatható, hogy

1. Az elmélet N konduktora megegyezik a T Dehn-twist rendjével;

2. Az összes moduláris mátrixelemet tartalmazó legkisebb F számtest megegyezik a teljes $\mathbb{Q}\left[\zeta_N\right]$ ciklotomikus testtel;

3. Adott számú primér tér (vagyis adott dimenziójú moduláris ábrázolás) esetén az elmélet N konduktora felülről korlátos, így csak véges sok különböző értéket vehet fel. Ennek következményeként a T Dehn-twistre is csak véges sok lehetőség adódik.

Egy másik, az előzőektől független következménye az analízisnek az, hogy – M-mel jelölve az $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ moduláris transzformáció ábrázolási mátrixát, és feltéve, hogy d és az N konduktor relatív prím –

$$\sigma_d \left(M\right) = T^b S^{-1} T^{-c} S G_d \ . \qquad (6.16)$$

Ez az eredmény egyrészt nagyon effektív módszert szolgáltat a moduláris mátrixelemek gyors meghatározására, több nagyságrenddel csökkentve a számítások bonyolultságát, másrészt lehetővé teszi a moduláris ábrázolás magjának részletes jellemzését.

A legelegánsabb eredmények az úgynevezett *projektív magra* vonatkoznak [12], mely mindazon moduláris transzformációkból áll, amelyek ábrázolási mátrixa az egységmátrix skalárszorosa[3]. Jelölje ugyanis K a T mátrix projektív rendjét (vagyis a legkisebb pozitív számot, melyre T^K skalármátrix), és legyen $\mathfrak{h}$ mindazon maradékosztályok (modulo N) halmaza, melyekre a megfelelő Galois-mátrix skaláris:

$$\mathfrak{h} = \left\{ l \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \mid G_l = \pm 1 \right\} . \tag{6.17}$$

Mivel K osztója az N konduktornak, ezért $\mathfrak{h}$ elemeit redukálhatjuk modulo K, ezáltal $(\mathbb{Z}/K\mathbb{Z})^{\times}$-beli maradékosztályokra jutva, melyek halmazát $\mathfrak{h}_K$-val fogjuk jelölni. Ekkor a

$$\Gamma\left(K, \mathfrak{h}_K\right) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a, d \in \mathfrak{h}_K,\ \ b, c \equiv 0 \pmod{K} \right\} \tag{6.18}$$

úgynevezett *Shimura-csoport* egy maximum 2 indexű részcsoportja a projektív magnak, azaz vagy megegyezik vele (ez történik az esetek döntő többségében), vagy annak a felét adja ki. Ez utóbbi eset a konform térelméletek különösen érdekes és jelentős szimmetriáinak, az úgynevezett *Galois-áramoknak* a létezésével kapcsolatos [12].

[3]Világos, hogy a valódi mag véges indexű normális részcsoportja a projektív magnak.

7. fejezet

Összegzés és kitekintés

Mint azt már az értekezés bevezetésében is igyekeztünk hangsúlyozni, a permutációs orbifoldok elmélete több különféle fizikai és matematikai diszciplína találkozási pontjában helyezkedik el. Egyrészt a mértékszimmetriák általános elméletének egy (nagyon) speciális alfejezete, ahol diszkrét permutációs szimmetriák hatását vizsgáljuk kétdimenziós konform térelméletekkel leírható dinamikájú rendszereken. Másrészt úgy is tekinthetjük az elméletet, mint a konform térelméleti orbifold modelleknek azt a részesetét, amikor a twist-csoport egy permutációcsoport. Bármely megközelítést is válasszuk, az elmélet fő erénye, hogy megoldható, azaz explicit módon leírható az orbifoldizáció hatása, méghozzá univerzálisan, vagyis az orbifoldizált rendszer dinamikájának részletes ismerete nélkül. Ebből a szempontból egészen egyedülálló az elmélet.

A másik fő szempont, amely a permutációs orbifoldok iránti érdeklődést motiválja, hogy kiterjedt az alkalmazásaik köre: a másodkvantált húrelméletek leírásától a kongruencia-részcsoport tulajdonság bizonyításáig, hogy csak a legfontosabbakat említsük. Valójában a fent felsoroltak csak töredékét adják az elmélettel kapcsolatban felmerülő lehetséges alkalmazásoknak, melyek egyikére-másikára rövidesen kitérünk.

Az értekezés megpróbálta felvázolni az elmélet legfőbb eredményeit és az azok megértéséhez elengedhetetlen matematikai fogalmak hátterét. Hangsúlyosan szerepelt az elmélet mögött meghúzódó geometriai kép, a világlepedő fedéseivel kapcsolatos meggondolások. Mivel az elmélet kifejtéséhez szükséges matematikai fogalmak nem mind közismertek, ezért három függelék foglalta össze az olyan témákat, mint a koszorú-szorzatok és az orbifold-transzformáció, a Riemann-felületek és modulusaik fogalma, a felületek fedéseinek elmélete, illetve a csoportduplák struktúra-, ábrázolás- és karakterelmélete. Remélhetőleg ezek segítenek a kevésbé ismert fogalmakkal és eredményekkel kapcsolatos kérdések tisztázásában.

Mint azt az értekezés folyamán végig hangsúlyoztuk, az elmélet legfontosabb tulajdonsága az, hogy egzaktul megoldható. Ezen túlmenően két olyan fontos alaptulajdonsággal rendelkezik, amelyek döntő szerepet játszanak mind az elmélet felépítésében, mind az alkalmazásokban. Ezek a tranzitivitás, amely a szukcesszív orbifoldizáció eredményét írja le, és az univerzalitás, amely az orbifoldizált elmélettől való függés mikéntjét jellemzi: részletes ismertetésük a 3. fejezet tárgya.

A rákövetkező fejezetek az elmélet legfontosabb eredményeit foglalják össze. Részletesen tárgyalják a partíciós függvények szerkezetét, beleértve a magasabb génuszok esetét, a primér terek osztályozását, a királis karaktereket és azok moduláris tulajdonságait, a fúziós együtthatókat, stb. Ezen eredmények alkotják az értekezés gerincét, és szolgálnak alapul az alkalmazásokhoz.

Az utolsó fejezet az orbifold-kovarianciával kapcsolatos megfontolásokat mutatja be, és illusztrálja eme rendkívül hatékony vizsgálati módszer alkalmazását két esetben, a Pradisi–Sagnotti–Stanev-sejtés és a kongruencia-részcsoport tulajdonság igazolásában. Ezen utóbbi fontos eredmény bizonyításában betöltött szerep már önmagában igazolja a permutációs orbifoldok vizsgálatának jogosultságát.

Mint korábban említettük, az elméletnek több potenciális alkalmazása jöhet számításba. Az egyik lehetőség bonyolult konform térelméletek jellemzőinek származtatása egyszerűbb elméletek vizsgálata révén. Ez azon a felismerésen alapszik, hogy szerencsés esetben egy (racionális) konform térelméletet már viszonylag kevés adat egyértelműen meghatároz. Például Cappelli és d'Appollonio megmutatták [27], hogy az Ising-modell harmadfokú tranzitív permutációs orbifoldjai egyértelműen azonosíthatók bizonyos szuperkonform elméletekkel, kizárólag a primér terek osztályozását és a moduláris adatokat figyelembe véve. Míg az Ising-modellről bőséges ismeretanyag áll rendelkezésre, a fent említett szuperkonform modellek esetén már a partíciós függvények számolása is bonyolult feladat: viszont a fenti azonosítás révén az eredmény egyszerű módon kifejezhető az Ising-modell megfelelő adatainak segítségével, döntő módon leegyszerűsítve ezen szuperkonform modellek vizsgálatát. Általában is elmondható, hogy egy konform térelméletnek permutációs orbifoldként való beazonosítása, bár messze nem triviális feladat, de alapvető egyszerűsítést jelent az elmélet tárgyalásában.

Egy másik potenciális alkalmazás a "Holdvilág" jelenségével kapcsolatos [80, 30], amire többször is utaltunk az értekezés során. Bár a 90-es évek derekán Borcherds bebizonyította a Moonshine-sejtéseket [24] – amit rövid időn belül Fields Medal-lal honoráltak –, de mint azt egyre többen hangoztatják az utóbbi években [58], a jelenséget magát nem magyarázta meg. Hogy szoros kapcsolat áll fenn az orbifold modellekkel, azt viszonylag korán felismerték [42, 4, 81], de mindmáig nem sikerült fizikai értelmet adni az egyik legfontosabb kérdéskörnek, az úgynevezett replikációs formulák létének (amelyek a Borcherds-féle bizonyításban is döntő szerepet játszottak). Egyre több jel utal arra, hogy a replikációs formulák a Moonshine-orbifold szimmetrikus szorzataival kapcsolatosak, ezáltal esetleg lehetővé téve az egész problémakör fizikai interpretációját.

Végül mindenképpen szót kell ejteni az elmélet egyik legfontosabb alkalmazásáról – amit részben érintettünk az értekezésben –, a húrok másodkvantálásának problematikájáról, illetve általánosabb értelemben a szimmetrikus szorzatok elméletéről. E témának már kiterjedt irodalma van [37, 16, **?**, 70, 71, 20], és továbbra is intenzíven vizsgálják, ezért részletes ismertetése messze túlmutatna az értekezés keretein. Bár sok fontos kérdésre ismert a válasz, de a szimmetrikus szorzatok elmélete messze nem tekinthető lezártnak, amint azt az irántuk megnyilvánuló lankadatlan érdeklődés is bizonyítja.

A. Függelék

Koszorú-szorzatok és az orbifold-transzformáció

A jelen függelékben vázoljuk a koszorú-szorzatok definícióját és néhány fontos tulajdonságát, és áttekintjük az orbifold-transzformáció elméletének alapjait, különös tekintettel a konform térelméleti alkalmazásokkal kapcsolatos eredményekre.

A.1. Koszorú-szorzatok

Legyen X és Y két (véges) halmaz, $\omega \in S_Y$ az Y egy permutációja, míg $\phi : Y \to S_X$ egy tetszőleges leképezés Y-ból az X feletti S_X szimmetrikus csoportba (más szóval ϕ az Y minden egyes eleméhez az X-nek egy permutációját rendeli). Ekkor ω-hoz és ϕ-hez hozzárendelhető az $X \times Y$ Descartes-szorzatnak egy $\phi \wr \omega$-val jelölt permutációja, amely az alábbi módon hat az $X \times Y$ Descartes-szorzat elemein:

$$\phi \wr \omega : (x, y) \mapsto (\phi (y) x, \omega y) \ . \tag{A.1}$$

Egyszerű ellenőrizni, hogy $\phi \wr \omega$ valóban az $X \times Y$-nak egy permutációja, azaz egy önmagára való bijektív leképezése. A fenti definícióval egy

$$\begin{aligned} (S_X)^Y \times S_Y &\rightarrow S_{X\times Y} \\ (\phi, \omega) &\mapsto \phi \wr \omega \end{aligned}$$

leképezést értelmeztünk, ahol szokás szerint B^A jelöli az A-ból B-be vivő leképezések összességét.

A $\phi \wr \omega$ alakú permutációk hatása a következőképpen szemléltethető: egy pakli kártyát akarunk megkeverni (vagyis lapjait permutálni egymással), de nem az egész paklit keverjük egyszerre, hanem először felosztjuk egyenlő nagyságú részekre, majd mindegyik részt külön-külön és egymástól teljesen függetlenül megkeverjük, végül az egyes részeket is összekeverjük egymással, de úgy, hogy a lapok sorrendje egy adott részen belül már ne változzon. Szemléltető példánkban az Y halmaz a pakli részeinek összessége, az X halmaz indexeli az egyes részeken belül található kártyákat – emlékezzünk vissza, hogy minden rész azonos nagyságú –, az ω permutáció az egyes részeket keveri egymással, míg a $\phi : Y \rightarrow S_X$ leképezés jelentése, hogy $\phi(y)$ adja meg az y-nal indexelt rész keverését leíró permutációt.

Legyen most $\phi_1, \phi_2 \in (S_X)^Y$ két, Y-ból az S_X szimmetrikus csoportba vivő leképezés, és $\omega_1, \omega_2 \in S_Y$ két permutációja Y-nak. Könnyen ellenőrizhető a definíciók alapján, hogy

$$(\phi_1 \wr \omega_1)(\phi_2 \wr \omega_2) = (\phi_1^{\omega_2}\phi_2) \wr (\omega_1\omega_2) \ , \tag{A.2}$$

ahol $\phi^\omega = \phi \circ \omega$, míg $\phi_1\phi_2$ jelöli a két leképezés pontonkénti szorzatát, azaz

$$\begin{aligned} \phi_1\phi_2 : Y &\rightarrow S_X \\ y &\mapsto \phi_1(y)\,\phi_2(y) \ . \end{aligned}$$

Valóban, (A.1) alapján egy $(x, y) \in X \times Y$ párt a $\phi_2 \wr \omega_2$ permutáció a $(\phi_2(y)\,x, \omega_2 y)$ párba képez, ez utóbbit pedig $\phi_1 \wr \omega_1$ a $(\phi_1(\omega_2 y) \circ \phi_2(y)\,x, \omega_1(\omega_2 y))$

párba, ami nem más, mint $(\phi_1^{\omega_2}\phi_2(y)\, x, \omega_1\omega_2 y)$. A (A.2) összefüggés legfontosabb következménye, hogy a $\phi \wr \omega$ alakú permutációk az $S_{X\times Y}$-nak egy részcsoportját alkotják, amelyet szokás $S_X \wr S_Y$-nal jelölni. Utóbbiról könnyű belátni, hogy valódi részcsoport, vagyis nem állítható elő $X \times Y$ minden permutációja $\phi \wr \omega$ alakban, ami egyszerűen következik például számossági megfontolásokból, hiszen $|S_X \wr S_Y| = |Y|!\,(|X|!)^{|Y|}$, ami általában kisebb, mint $|S_{X\times Y}| = (|X|\,|Y|)!$.

Amennyiben Ω_1 az X halmaznak, míg Ω_2 az Y halmaznak egy permutációcsoportja, akkor a $\phi \in \Omega_1^Y$ és $\omega \in \Omega_2$ párokhoz rendelt $\phi \wr \omega$ permutációk nyilván egy részcsoportját alkotják $S_X \wr S_Y$-nak, amit az Ω_1 és Ω_2 permutációcsoportok koszorú-szorzatának nevezünk, és $\Omega_1 \wr \Omega_2$-vel jelölünk [41]. A koszorú-szorzat rendjét a

$$|\Omega_1 \wr \Omega_2| = |\Omega_1|^{\deg(\Omega_2)}\,|\Omega_2| \tag{A.3}$$

képlet adja meg, ahol $\deg(\Omega)$ jelöli az Ω permutációcsoport fokszámát, vagyis az általa permutált halmaz számosságát. Ezzel szemben a fokszámok összeszorzódnak:

$$\deg(\Omega_1 \wr \Omega_2) = \deg(\Omega_1)\deg(\Omega_2) \ . \tag{A.4}$$

A koszorú-szorzatok alapvető tulajdonsága az asszociativitás: amennyiben Ω_1, Ω_2 és Ω_3 három permutációcsoport, akkor az

$$\Omega_1 \wr (\Omega_2 \wr \Omega_3)$$

és

$$(\Omega_1 \wr \Omega_2) \wr \Omega_3$$

permutációcsoportok ekvivalensek egymással (azaz nemcsak izomorfak, de egyazon absztrakt csoport ekvivalens permutációs hatásait realizálják). Megjegyezzük, hogy a koszorú-szorzat képzése nyilvánvalóan nem kommutatív, amint az egyszerű számossági megfontolásokból is következik.

Az alkalmazások szempontjából fontos a koszorú-szorzatok pályáinak leírása. Belátható ugyanis, hogy az $\Omega_1 \wr \Omega_2$ minden pályája előáll $\xi \times \eta$ Descartes-szorzatként, ahol ξ az Ω_1, míg η az Ω_2 egy pályája. Valóban, ha tekintjük egy $(x, y) \in X \times Y$ pont

$$(\Omega_1 \wr \Omega_2)(x, y) = \left\{ (\phi(y) x, \omega y) \mid \phi \in (\Omega_1)^Y,\ \omega \in \Omega_2 \right\}$$

pályáját, akkor ennek a második komponensre vett projekciója nyilván az $\Omega_2 y$ pálya, míg az első komponensre vett projekció $\Omega_1 x$, mivel $\phi \in (\Omega_1)^Y$ tetszőlegesen választható. Látható, hogy a pályákon túlmenően a pályák stabilizátorai is egyszerűen jellemezhetők, hiszen

$$Stab_{\Omega_1 \wr \Omega_2}(x, y) = \{ \phi \wr \omega \mid \omega \in Stab_{\Omega_2}(y),\ \phi(y) \in Stab_{\Omega_1}(x) \} \ . \tag{A.5}$$

Végül, de nem utolsósorban, a koszorú-szorzatoknak az alkalmazások szempontjából egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy a koszorú-szorzatokba képező homomorfizmusok szerkezete viszonylag jól kezelhető. Legyen ugyanis G egy tetszőleges csoport, míg Λ és Ω két, az X és Y halmazokon ható permutációcsoport, és tekintsünk egy $\phi : G \to \Lambda \wr \Omega$ homomorfizmust. A ϕ homomorfizmus a G csoport minden g eleméhez hozzárendeli a $\Lambda \wr \Omega$ koszorú-szorzat egy $\phi(g) = \lambda(g) \wr \omega(g)$ elemét, ahol $\omega(g) \in \Omega$, míg $\lambda(g) \in \Lambda^Y$. Mivel ϕ homomorfizmus, ezért az $g \mapsto \omega(g)$ leképezés egy $\omega : G \to \Omega$ homomorfizmust definiál; viszont a $g \mapsto \lambda(g)$ leképezés csak egy derivációt (más elnevezéssel keresztezett homomorfizmust) határoz meg, vagyis egy, a

$$\lambda(gh) = \lambda(g)^{\omega(h)} \lambda(h) \tag{A.6}$$

azonosságnak eleget tevő $\lambda : G \to \Lambda^Y$ leképezést.

A $\lambda : G \to \Lambda^Y$ derivációk a következőképpen osztályozhatók: jelöljük $\mathcal{O}(\omega)$-val az $\omega(G)$ csoport (az ω homomorfizmus képe) pályáit, illetve G_ξ-

vel a $\xi \in \mathcal{O}(\omega)$ pálya stabilizátorát:

$$G_\xi = \{g \in G \,|\, \omega(g)\,\xi^* = \xi^*\} \ , \tag{A.7}$$

ahol ξ^* jelöli a ξ pálya egy (tetszőlegesen választott) reprezentánsát. Ekkor egy $\lambda : G \to \Lambda^Y$ deriváció minden $\xi \in \mathcal{O}(\omega)$ pályához hozzárendel egy $\Phi_\xi : G_\xi \to \Lambda$ homomorfizmust és egy olyan $\psi_\xi : G/G_\xi \to \Lambda$ leképezést, amelyre $\psi_\xi(G_\xi) = 1$. Fordítva, ha minden egyes $\xi \in \mathcal{O}(\omega)$ pályához adott egy $\Phi_\xi : G_\xi \to \Lambda$ homomorfizmus és egy olyan $\psi_\xi : G/G_\xi \to \Lambda$ leképezés, amelyre $\psi_\xi(G_\xi) = 1$, akkor ezek az adatok egyértelműen meghatároznak egy $\lambda : G \to \Lambda^Y$ derivációt, ami az $\omega : G \to \Omega$ homomorfizmussal együttesen meghatároz egy $\phi : G \to \Lambda \wr \Omega$ homomorfizmust. Mindezek fontos szerepet játszanak mind a permutációs orbifoldok geometriai interpretációjában, mind az olyan alaptulajdonságok bizonyításában, mint a tranzitivitás és az (A.15) exponenciális azonosság.

A koszorú-szorzatok és ábrázolásaik részletesebb leírása megtalálható a szakirodalomban [67]. Megjegyezzük, hogy az iterált koszorú-szorzatok szerepet játszanak az elméleti fizika más területein is, például a rendezetlen rendszerek elméletében, az úgynevezett replikaszimmetria-sértés leírásában [19].

A.2. Az orbifold-transzformáció

Bár látszólag független, mégis szorosan kapcsolódik a koszorú-szorzatok elméletéhez egy másik csoportelméleti fogalom, az úgynevezett orbifold-transzformáció, amely alapvető szerepet játszik a permutációs orbifoldok elméletében: valójában, amint arra neve is utal, a permutációs orbifoldok bizonyos aspektusainak messzemenő általánosításának tekinthető.

Az orbifold-transzformáció definíciója a következő: tekintsünk egy végesen generált G csoportot, és egy R egységelemes, kommutatív $\mathbb{Q}$-algebrát, azaz egy olyan kommutatív gyűrűt, amely részgyűrűként tartalmazza a racionális számok testét. Jelölje $\mathscr{L}(G)$ a G csoport véges indexű részcsoportjainak összességét, és $\mathscr{Cl}\,(G,R)$ az R értékű osztályfüggvények halmazát $\mathscr{L}(G)$-n, vagyis az olyan $\mathcal{Z}:\mathscr{L}(G)\to R$ leképezések halmazát, amelyekre

$$\mathcal{Z}\left(g^{-1}Hg\right)=\mathcal{Z}\left(H\right)$$

minden $H\in\mathscr{L}(G)$ és $g\in G$-re (vegyük észre, hogy egy véges indexű részcsoport minden konjugáltja maga is véges indexű, ezért a fenti feltétel értelmes).

Tetszőleges $\Omega<S_X$ permutációcsoporthoz hozzárendelhető egy

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{Cl}\,(G,R) & \to & \mathscr{Cl}\,(G,R)\\ \mathcal{Z} & \mapsto & \mathcal{Z}\wr\Omega\end{array}$$

leképezés az alábbi képlet alapján:

$$\mathcal{Z}\wr\Omega:H\mapsto\frac{1}{|\Omega|}\sum_{\phi:H\to\Omega}\prod_{\xi\in\mathcal{O}(\phi)}\mathcal{Z}\left(H_{\xi}\right)\ . \tag{A.8}$$

E képletben az összegzés az összes $\phi:H\to\Omega$ homomorfizmusra értendő, $\mathcal{O}\left(\phi\right)$ jelöli a ϕ homomorfizmus $\phi\left(H\right)$ képének pályáit (az Ω permutációcsoport X tartóhalmazán), míg

$$H_{\xi}=\left\{g\in H\,|\,\phi\left(g\right)\xi^{*}=\xi^{*}\right\}$$

a $\xi\in\mathcal{O}\left(\phi\right)$ pálya egy (tetszőleges) ξ^{*} reprezentásának a stabilizátora. Vegyük észre, hogy a fenti definíció értelmes: egyfelől, csak véges sok $\phi:H\to\Omega$ homomorfizmusra kell összegezni (mivel a Reidemeister–Schreier-tétel értelmében egy végesen generált csoport minden véges indexű részcsoportja maga is végesen generált, és nyilvánvaló, hogy egy végesen generált csoportból egy véges csoportba képező homomorfizmusok száma véges); másrészt $\mathcal{Z}\left(H_{\xi}\right)$ értéke független a ξ^{*} reprezentáns választásától, mivel egyazon pálya különböző pontjainak stabilizátorai (amelyek mind véges indexű részcsoportjai G-nek) egymás konjugáltjai, és definíció szerint $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény. Annak belátása sem okoz különösebb nehézséget, hogy $\mathcal{Z} \wr \Omega$ maga is osztályfüggvény. $\mathcal{Z} \wr \Omega$-t a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény (Ω szerinti) *orbifold-transzformáltjának* nevezzük.

A legegyszerűbb nemtriviális esete az orbifold-transzformációnak az, amikor G végtelen ciklikus, azaz izomorf az egész számok $\mathbb{Z}$ additív csoportjával. Mivel $\mathbb{Z}$ minden véges indexű részcsoportja maga is végtelen ciklikus, ezért egy ilyen részcsoport $n\mathbb{Z}$ alakú, ahol n egy pozitív egész szám, ami mellesleg pont a részcsoport indexe $\mathbb{Z}$-ben. Ez azt jelenti, hogy egy-egyértelmű kapcsolat áll fent $\mathscr{L}(\mathbb{Z})$ és a természetes számok között. $\mathbb{Z}$ kommutativitása miatt minden részcsoport önmaga alkot egy konjugált osztályt, ezért $\mathbb{Z}$ osztályfüggvényei felfoghatók úgy is, mint a természetes számok halmazából az R-be vivő leképezések, azaz R-beli értékeket felvevő $\mathcal{Z}(1), \mathcal{Z}(2), \ldots$ végtelen sorozatok. Másfelől egy $\phi : \mathbb{Z} \to \Omega$ homomorfizmust egyértelműen meghatároz a $\phi(1) \in \Omega$ elem: egy ilyen homomorfizmus képének pályái megegyeznek a $\phi(1)$ permutáció pályáival, és egy adott $\xi \in \mathcal{O}(\phi)$ pálya stabilizátora nem más, mint $|\xi|\,\mathbb{Z}$, amint az könnyen belátható az orbit-stabilizátor-tétel segítségével, hiszen a stabilizátor indexe éppen a pálya hossza. Mindezt figyelembe véve, esetünkben az orbifold-transzformáció alakja

$$(\mathcal{Z} \wr \Omega)(n) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{x \in \Omega} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(x)} \mathcal{Z}(n\,|\xi|) \ . \tag{A.9}$$

A fenti eredmény egyszerűen kifejezhető egy klasszikus fogalom, az úgynevezett ciklusmutató polinom segítségével. Egy $\Omega < S_X$ permutációcsoport ciklusmutató polinomja az alábbi többváltozós polinom [79]:

$$P_\Omega\left(t_1, \ldots, t_{|X|}\right) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{x \in \Omega} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(x)} t_{|\xi|} \ . \tag{A.10}$$

A ciklusmutató polinom fontos szerepet játszik az enumeratív kombinatorikában és az ábrázoláselméletben, de fontos alkalmazásai vannak a természettudományok különféle területein, például a kémiában is.

A ciklusmutató polinom segítségével az (A.9) eredmény az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$(\mathcal{Z} \wr \Omega)(n) = P_\Omega\left(\mathcal{Z}(n), \ldots, \mathcal{Z}(n|X|)\right) ,$$

vagyis a ciklusmutató polinom t_k változóját $\mathcal{Z}(nk)$-val kell helyettesíteni.

Amíg a $G = \mathbb{Z}$ választás végeredményben egy klasszikus fogalomra, a ciklusmutató polinomra vezet, addig más végesen generált csoportok esetén újfajta eredmények adódnak. A következő legegyszerűbb eset, amely a fizikai alkalmazásokban is fontos szerepet játszik, amikor $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Mivel $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ egy véges rangú szabad Abel-csoport, ezért minden véges indexű részcsoportja izomorf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-vel, és minden konjugált osztály pontosan egy részcsoportot tartalmaz. A $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ véges indexű részcsoportjai, szemben a $\mathbb{Z}$ hasonló részcsoportjaival, nem jellemezhetők egyedül az indexükkel: jellemzésükre egy 2x2-es Hermite-féle normálformájú mátrix (röviden HNF) szükséges [29]. Egy HNF nem más, mint egy olyan egész elemű, 2x2-es H mátrix, amelynek bal alsó H_{21} mátrixeleme zérus, H_{11} és H_{22} diagonális elemei pozitívak, míg H_{12} jobb felső mátrixeleme eleget tesz a $0 \leq H_{12} < H_{22}$ egyenlőtlenségnek.

Valóban, a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ két, egymással kommutáló a és b elemmel generálható, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$, amiből következik, hogy elemeinek halmaza $\left\{a^\alpha b^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\right\}$. Hasonlóképpen, egy véges indexű részcsoport generálható egy $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ párral, és a fentiek alapján ezek kifejezhetők

$$\begin{aligned} \overline{a} &= a^{H_{11}} b^{H_{12}} \\ \overline{b} &= a^{H_{21}} b^{H_{22}} \end{aligned}$$

alakban, ahol H egy 2x2-es egész elemű mátrix. De egyazon részcsoport több különböző $\overline{a}, \overline{b}$ párral generálható, és belátható, hogy létezik pontosan egy olyan generáló pár, amelyre a H mátrix Hermite-féle normálformájú. A fentiekből az is kitűnik, hogy a H HNF által jellemzett részcsoport indexe megegyezik a H mátrix $\det H$ determinánsával.

Az eddigiek alapján jelen esetben az osztályfüggvények azonosíthatók a 2x2-es HNF-ek halmazán értelmezett, R-beli értékeket felvevő függvények összességével. Másrészt egy $\phi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \Omega$ homomorfizmust egyértelműen jellemez a $\phi(a)$ és $\phi(b)$, ahol továbbra is a-val és b-vel jelöltük a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ két generátorát. Mivel a és b kommutál, ezért a $\phi(a)$ és $\phi(b)$ permutációk is felcserélhetők egymással. Vagyis a $\phi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \Omega$ homomorfizmusok egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a kommutáló Ω-beli elempárokkal, ezek halmazát szokás szerint $\Omega^{\{2\}}$ jelöli. Az (x, y) kommutáló elempárral jellemzett ϕ homomorfizmus képének pályái megegyeznek az x és y permutációk által generált csoport pályáival:

$$\mathcal{O}(\phi) = \mathcal{O}(x, y) \ .$$

Kommutáló permutációpárok pályáinak szerkezete (vagyis a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ csoport tranzitív permutációs hatásai) jellemezhető három numerikus invariánssal (lásd azA.1 ábrát), amelyek meghatározzák a stabilizátor szerkezetét (mivel a csoport kommutatív, ezért egy pálya különböző pontjainak stabilizátorai megegyeznek, vagyis értelmes egy adott pálya stabilizátoráról beszélni). Egy $\xi \in \mathcal{O}(\phi)$ pálya stabilizátora maga is véges indexű részcsoportja $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-nek, ezért jellemezhető egy

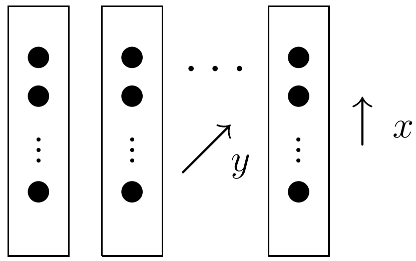
$$H_\xi = \begin{pmatrix} \mu_\xi & \kappa_\xi \\ 0 & \lambda_\xi \end{pmatrix}$$

HNF-fel, ahol az egyes mátrixelemek jelentése a következő:

1. λ_ξ azt mondja meg, hogy egy adott $\xi \in \mathcal{O}(x, y)$ pályában foglalt x pályáknak mekkora a hossza (x és y kommutativitásából következik, hogy a ξ-ben található összes x pálya hossza megegyezik);

2. μ_ξ nem más, mint a $\xi \in \mathcal{O}(x, y)$ pályában foglalt x pályák száma;

3. κ_ξ a pálya stabilizátorát jellemzi. A pontos feltétel az, hogy $x^{\kappa_\xi} y^{\mu_\xi}$



A.1. ábra. Az $(x, y) \in S_n^{\{2\}}$ kommutáló permutációpár egy pályájának szerkezete. A fekete korongok jelölik a pálya pontjait, a függőleges téglalapok a pályában foglalt x pályákat, melyek mind azonos λ hosszúságúak, és számuk μ. Az y permutáció az egyes téglalapok között léptet, de ferdén, vagyis y^μ az x valamely hatványával azonos hatású, ez definiálja a pályát jellemző κ paramétert. A (λ, μ, κ) hármas meghatározza a pálya stabilizátorának HNF-ét.

eleme a stabilizátornak.

Megjegyezzük, hogy $\lambda_\xi \mu_\xi = |\xi|$, mivel a stabilizátor indexe pont a pálya hossza. A fentiekből kitűnik, hogy egy adott pálya stabilizátorának HNF-je könnyen meghatározható a permutációs hatás adataiból.

Összefoglalva az fentieket, a $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ esetben az orbifold-transzformáció az alábbi alakot ölti:

$$(\mathcal{Z} \wr \Omega)(H) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{(x,y) \in \Omega^{\{2\}}} \prod_{\xi \in \mathcal{O}(x,y)} \mathcal{Z}(H H_\xi) \ , \tag{A.11}$$

ahol $\Omega^{\{2\}}$ jelöli az Ω-beli kommutáló párok összességét,visszaemlékezve arra, hogy a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény a HNF-ek halmazán van értelmezve[1].

Az eddigiek során az orbifold-transzformációt rögzített G és tetszőleges $\mathcal{Z} \in \mathscr{Cl}(G, R)$ osztályfüggvény esetében vizsgáltuk. Figyelmet érdemel az az eset is, amikor a G csoport tetszőleges, de a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvényt speciálisan választjuk. Például, amennyiben a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény értéke azonosan 1 minden véges indexű részcsoporton, akkor $\mathcal{Z} \wr \Omega$ orbifold-transzformáltja a G véges indexű részcsoportjaiból az Ω-ba vivő homomorfizmusokat számolja le.

[1] Könnyű belátni, hogy két HNF szorzata maga is egy HNF.

Még érdekesebb az az eset, amikor a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény egy 1-től különböző konstans: $\mathcal{Z}(H) = s$ minden $H \in \mathscr{L}(G)$ részcsoportra, ahol $s \neq 1$. Ekkor az orbifold-transzformált továbbra is a $H \to \Omega$ homomorfizmusokat számolja le, de súlyozva egy, a homomorfizmus képe pályáinak (vagyis a megfelelő permutációs hatás tranzitív összetevőinek) számától függő faktorral. Például, egy permutációs orbifold primér terei számát meghatározó $P_\Omega(s)$ polinom (lásd (3.2) képlet) nem más, mint a $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ csoport $\mathcal{Z} = s$ konstans osztályfüggvényének orbifold-transzformáltja.

Az orbifold-transzformáció talán legalapvetőbb tulajdonsága a tranzitivitás: eszerint, ha $\mathcal{Z} \in \mathscr{C}\ell(G,R)$ és Ω_1,Ω_2 két permutációcsoport, akkor

$$(\mathcal{Z} \wr \Omega_1) \wr \Omega_2 = \mathcal{Z} \wr (\Omega_1 \wr \Omega_2) \ . \tag{A.12}$$

A tranzitivitás bizonyítása a koszorú-szorzatoknak e függelékben megismert tulajdonságain alapszik, döntő jelentőségű a koszorú-szorzatokba képező homomorfizmusok korábban ismertetett osztályozása. Már az elnevezésből is kitűnik e tulajdonság szoros kapcsolata a permutációs orbifoldok hasonló elnevezésű tulajdonságával.

Egy másik, a definíciókból könnyen adódó, de az alkalmazások szempontjából rendkívül hasznos tulajdonsága az orbifold-transzformációnak az, hogy felcserélhető a *lokalizációval.* Egy $\mathcal{Z} \in \mathscr{C}\ell(G,R)$ osztályfüggvény $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathscr{C}\ell(G,R[s])$ lokalizáltját [2] a

$$\hat{\mathcal{Z}}(H) = \mathcal{Z}(H)\, s^{[G:H]} \tag{A.13}$$

képlet alapján értelmezzük: az elnevezés abból ered, hogy amennyiben s-t kis ($\ll 1$) numerikus értéknek tekintjük, akkor a magas indexű részcsoportok járuléka el lesz nyomva, vagyis a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvényt lokalizáltuk az alacsony indexű részcsoportokra. A lokalizáció fontos szerepet játszik például akkor, amikor a következő alfejezetben tárgyalandó exponenciális azonosságot át

[2] Itt $R[s]$ jelöli az R gyűrű feletti egyváltozós polinomgyűrűt, melynek változója s.

kivánjuk alakítani formális azonosságból konvergens sorok közötti összefüggéssé. Az orbifoldizáció és a lokalizáció felcserélhetősége azt jelenti, hogy

$$\widehat{\mathcal{Z} \wr \Omega} = \hat{\mathcal{Z}} \wr \Omega \tag{A.14}$$

fennáll minden $\mathcal{Z} \in \mathscr{Cl}(G, R)$ és Ω permutációcsoportra.

Befejezésül ide kivánkozik annak megemlítése, hogy az orbifold-transzformáció itt ismertetett alakja módosítható úgynevezett *kohomologikus twist*ek bevezetésével. Ezen eljárás részleteinek ismertetését mellőzzük, csak annyit jegyzünk meg, hogy a diszkrét torzió fogalmának messzemenő általánosítását szolgáltatja.

A.3. Az exponenciális azonosság

Az eddigiek során az orbifold-transzformációnak olyan speciális eseteit tekintettük át, amikor vagy a végesen generált G csoportot, vagy a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvényt rögzítettük, viszont az Ω permutációcsoportot tetszőlegesen választhattuk. Egy másik érdekes lehetőség az, ha se a G csoportról, se a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvényről nem tételezünk fel semmit, de az Ω permutációcsoportot rögzítjük. Kiemelkedő jelentőségű az az eset, amikor $\Omega = S_n$, az n-edfokú szimmetrikus csoport, ez az alapja a szimmetrikus szorzatok elméletének. Az alapvető eredmény ebben a kérdéskörben az úgynevezett exponenciális azonosság [16]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \mathcal{Z}_n(G) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n \mathcal{Z}^{[n]}(G)}{n}\right) . \tag{A.15}$$

A fenti összefüggésben G egy tetszőleges végesen generált csoport, p egy formális paraméter, $\mathcal{Z} \in \mathscr{Cl}(G, R)$ egy R-értékű osztályfüggvény $\mathscr{L}(G)$-n, ahol R egy megfelelő kommutatív $\mathbb{Q}$-algebra, és $\mathcal{Z}_n$ jelöli a $\mathcal{Z}$ osztályfüggvény

S_n szerinti orbifold-transzformáltját, azaz

$$\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z} \wr S_n \ , \tag{A.16}$$

végül pozitív egész n-re,

$$\mathcal{Z}^{[n]}(G) = \sum_{H \in \mathcal{L}_n(G)} \mathcal{Z}(H) \ , \tag{A.17}$$

ahol $\mathcal{L}_n(G)$ jelöli a G csoport n indexű részcsoportjainak összességét:

$$\mathcal{L}_n(G) = \{H \in \mathcal{L}(G) \mid [G:H] = n\} \ . \tag{A.18}$$

Megjegyezzük, hogy konvenció szerint $\mathcal{Z}_0(G) = 1$.

Az exponenciális azonosság bizonyítása megtalálható az irodalomban, lényegében az S_n-be képező homomorfizmusoknak a permutációs hatásokkal való azonosságát, illetve a permutációs hatások tranzitív dekompozícióját használja ki [16]. A bizonyítás ismertetése helyett e ponton inkább az exponenciális azonosság geometriai értelmezésére hívnánk fel a figyelmet: az azonosság bal oldala – megfelelően interpretálva – egy sokaság összes fedésére vonatkozó összegnek tekinthető, míg a jobb oldalon álló kifejezés exponense ugyanezen sokaság összefüggő fedéseire vett összegnek.

Abban a speciális esetben ha $G = \mathbb{Z}$, az exponenciális azonosság az alábbi jól ismert alakot ölti [79]:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n P_n(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n t_n}{n}\right) \ , \tag{A.19}$$

ahol $P_n(t_1, \ldots, t_n)$ jelöli az S_n szimmetrikus csoport ciklusmutató polinomját, vagyis az n-edik (másodfajú) Schur-polinomot, az ábrázoláselmélet és a kombinatorika egy jól ismert szereplőjét. Ezen eredmény felhasználásával, az (A.15) azonosságban a p azonos kitevőjű hatványainak összevetéséből végül a következő eredményt kapjuk:

$$\mathcal{Z}_n\left(G\right) = P_n\left(\mathcal{Z}^{[1]}\left(G\right), \ldots, \mathcal{Z}^{[n]}\left(G\right)\right) \ , \tag{A.20}$$

ami lényegében zárt alakban ad választ a szimmetrikus szorzatok elméletének alapkérdéseire. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{Z}^{[k]}\left(G\right)$ mennyiségek számolása a definíció alapján sokkalta könnyebb, mint a $\mathcal{Z}_n\left(G\right)$-ké, így a (A.20) képlet döntő módon egyszerűsíti az elméletet.

B. Függelék

Riemann-felületek és az uniformizációs tétel

Jelen függelék célja, hogy áttekintse a Riemann-felületek elméletének azon aspektusait, amelyek a konform térelméletben fontos szerepet játszanak, különös tekintettel a Riemann-felületek fedéseire és uniformizációjára, és a modulusok problematikájára.

B.1. Riemann-felületek és modulusaik

Egy komplex sokaság egy olyan geometriai objektum, amelyen értelmezhetőek a komplex függvénytan klasszikus fogalmai: a holomorficitás és meromorf-icitás. Az egydimenziós komplex sokaságokat szokás Riemann-felületeknek is nevezni, Bernhard Riemann tiszteletére, aki elsőnek ismerte fel e fogalom jelentőségét a (részben általa megteremtett) komplex analízis számára. A Riemann-felületek a legközvetlenebb általánosításai az összes komplex sokaság archetípusának, a komplex síknak, és ennek következtében sok közöttük a hasonlóság.

A fentiek szabatos megfogalmazása a következőképpen hangzik: egy X Hausdorff-féle topologikus téren értelmezett (egydimenziós) *komplex atlasz-*

nak (U_α, ϕ_α) párok olyan összességét nevezzük, ahol az U_α halmazok (a *lokális térképek*) az X-nek egy nyílt lefedését adják, míg a ϕ_α-k (a *lokális koordináták*) homeomorfizmusok az U_α és a komplex számsík egy nyílt részhalmaza között. Egy komplex atlasz holomorf, amennyiben $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ esetén az

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \rightarrow \phi_\alpha \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \tag{B.1}$$

leképezések holomorfak, azaz kielégítik a Cauchy–Riemann-egyenleteket. Két holomorf atlasz ekvivalens, ha uniójuk is holomorf, és holomorf atlaszok egy ekvivalencia-osztályát komplex struktúrának nevezzük az X-en. Végül, egy $(X, \mathcal{A})$ párt, ahol $\mathcal{A}$ egy komplex struktúra az X-en, *Riemann-felület*nek nevezünk [22, 47, 49]. Vegyük észre, hogy a fenti definíció alapján egy Riemann-felület egyben egy kétdimenziós differenciálható sokaság, amelyen adott egy természetes irányítás.

A legnyilvánvalóbb példa Riemann-felületre a komplex sík, ahol a $(\mathbb{C}, \mathbf{id})$ pár egy holomorf atlaszt alkot ($\mathbf{id}$ a $z \mapsto z$ identikus leképezést jelöli). Egy másik egyszerű példa a $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *Riemann-gömb*, amelyet a komplex sík kompaktifikációjaként kapunk, egy végtelen távoli ∞ pont hozzáadásával. Ekkor egy holomorf atlasz

$$\begin{aligned} U_1 = \mathbb{C} \ , \qquad & \phi_1 (z) = z \ ; \\ U_2 = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\} \ , \qquad & \phi_2 (z) = \frac{1}{z} \ , \end{aligned} \tag{B.2}$$

ahol szokás szerint $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$ jelöli a nemzérus komplex számok összességét.

Egy $f : X_1 \rightarrow X_2$ folytonos leképezést két Riemann-felület között akkor nevezünk *holomorfnak*, ha minden

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha \left(U_\alpha \cap f^{-1} \left(V_\beta\right)\right) \rightarrow \mathbb{C} \tag{B.3}$$

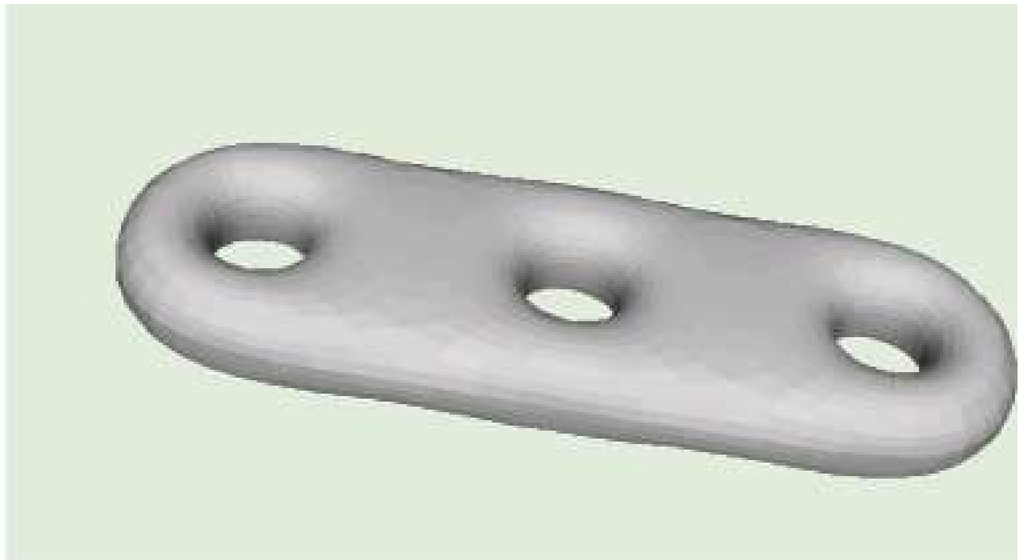
összetett leképezés holomorf (mint a komplex sík két nyílt halmaza közötti leképezés), ahol $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ az X_1, míg $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ az X_2 egy holomorf atlasza. A $\mathbb{C}$ komplex síkba (mint Riemann-felületbe) képező holomorf leképezéseket szokás *holomorf függvényeknek* nevezni, míg a $\mathbb{CP}^1$ Riemann-gömbbe képező holomorf leképezések a *meromorf függvények*. Egy Riemann-felületen értelmezett meromorf függvények összessége egy testet alkot a pontonkénti összeadásra és szorzásra.

Két Riemann-felület *konform ekvivalens* (más elnevezéssel *biholomorf*), amennyiben létezik közöttük invertálható holomorf leképezés. Az elnevezés arra vezethető vissza, hogy a komplex struktúra segítségével természetes módon értelmezhető két, a Riemann-felületen haladó és egymást metsző folytonos görbe közötti szög, és egy holomorf leképezés megőrzi ezt a szöget amennyiben invertálható a metszéspontban. Nyilván konform ekvivalens Riemann-felületek egyben homeomorfak is. Egy Riemann-felületet önmagába képező invertálható holomorf leképezést a felület automorfizmusának nevezünk, ezek alkotják a felület automorfizmus-csoportját.

A kompakt irányítható kétdimenziós sokaságok, vagyis a kompakt irányítható felületek topológiai osztályozása viszonylag egyszerű: egy g nemnegatív egész szám, az úgynevezett *génusz* különbözteti meg a topológiailag inekvivalens felületeket, amely lényegében a felület Euler-karakterisztikáját határozza meg: ez utóbbi értéke $2-2g$. Például, a $\mathbb{CP}^1$ Riemann-gömb egy nulla génuszú kompakt felület, annak megfelelően, hogy a gömbfelület Euler-karakterisztikája 2. Mivel a fundamentális csoport topologikus invariáns, ezért kompakt felület esetén szerkezete a génusz által teljesen meghatározott: egy $g > 0$ génuszú kompakt felület fundamentális csoportja izomorf a

$$\left\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle \tag{B.4}$$

prezentációjú Π_g csoporttal, ahol $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ az a és b csoportelemek kommutátorát jelöli. Nemkompakt felületek esetén az osztályozás valamelyest bonyolultabb, ezért arra nem térünk ki, mivel úgyis a kompakt eset



B.1. ábra. Egy $g = 3$ génuszú kompakt felület

fontos a számunkra.

A konform térelmélet szempontjából döntő jelentőségű, hogy egy-egyértelmű kapcsolat áll fenn egy irányítható felületen értelmezhető komplex struktúrák és ugyanezen felületen értelmezhető Riemann-metrikák konform ekvivalencia-osztályai között. A kapcsolat a következő megfontolásokból adódik [64]: egy Riemann-metrika kifejezése a

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\mathrm{d}y^2 \tag{B.5}$$

alakot ölti az (x, y) lokális koordináták segítségével. Bevezetve a $z = x + iy$ komplex koordinátát, a metrika alakja

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda \left|\mathrm{d}z + \mu \mathrm{d}\overline{z}\right|^2 \ , \tag{B.6}$$

ahol λ egy pozitív valós értékeket felvevő sima függvény, míg μ – az úgynevezett *Beltrami-koefficiens* – egy olyan komplex értékű függvény, melyre $|\mu| < 1$. *Izotermikus koordinátának* nevezzük (a megfelelő lokális környezetben) a

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = \mu\left(z, \overline{z}\right) \frac{\partial w}{\partial z} \tag{B.7}$$

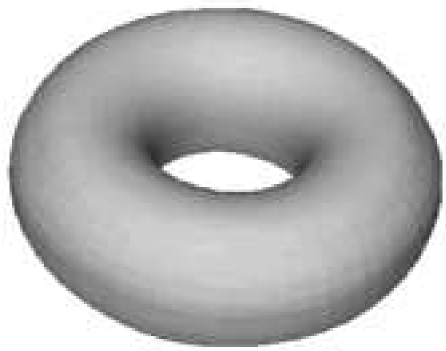
Beltrami-egyenlet egy megoldását, mivel annak $w = u + iv$ felbontása segítségével a metrika

$$\mathrm{d}s^2 = \rho\left(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2\right) \tag{B.8}$$

alakra hozható lokálisan, ahol ρ megint csak egy pozitív sima függvény. A w izotermikus koordináták összessége egy holomorf atlaszt definiál a felületen, a $\mathrm{d}s^2$ Riemann-metrika által indukált komplex struktúrát. Fordítva, egy komplex struktúra lokális koordinátái mindig megfeleltethetők egy Riemann-metrika izotermikus koordinátáinak a (B.8) képlet révén. Belátható, hogy a fenti megfeleltetés egy-egyértelmű a Riemann-metrikák és a komplex struktúrák konform ekvivalencia-osztályai között.

Egy adott topológiájú felületen értelmezhető inekvivalens komplex struktúrákat (pontosabban az ezeket jellemző numerikus paramétereket) nevezzük az adott felület modulusainak. Ez azt jelenti – amennyiben kompakt Riemann-felületekre korlátozzuk vizsgálódásunkat, amikor a génusz teljes mértékben meghatározza a topológiát –, hogy a g génusz minden megengedett értékéhez (vagyis minden nemnegatív egészhez) tartozik egy $\mathcal{M}_g$ *modulus tér*, melynek pontjai az adott génuszú Riemann-felületek. A legegyszerűbb esetben, ha a génusz 0, a modulus tér egy pontból áll, mivel a gömbfelületen minden komplex struktúra ekvivalens, vagyis a Riemann-gömb az egyetlen nulla génuszú kompakt Riemann-felület. Magasabb génuszok esetén a modulus tér kontinuum számosságú.

Amint arra az elnevezés is utal, az $\mathcal{M}_g$ modulus teret nem egyszerűen egy halmaznak, hanem egy geometriai objektumnak tekintjük. Ez nem egészen triviális, mivel a $g = 0$ esetet leszámítva $\mathcal{M}_g$ nem sokaság: a nemtriviális automorfizmusokkal rendelkező Riemann-felületek a modulus tér szingularitásainak felelnek meg. Viszont megmutatható, hogy $g > 0$ esetén a modulus



B.2. ábra. Egy kétdimenziós tórusz

tér előáll

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g / \Gamma_g \tag{B.9}$$

kvócienstérként, ahol $\mathcal{T}_g$ egy véges dimenziós, egyszeresen összefüggő komplex (sőt mi több: Kahler-) sokaság, az úgynevezett *Teichmüller-tér*, és Γ_g egy végesen prezentált diszkrét csoport, az úgynevezett *leképezési osztályok* csoportja, melynek elemei a Teichmüller-tér automorfizmusai [60, 64]. A leképezési osztályok csoportjának fixpontjai felelnek meg a modulus tér szingularitásainak, vagyis azon g génuszú Riemann-felületeknek, melyek automorfizmuscsoportja nem triviális.

A legegyszerűbb nemtriviális eset $g = 1$, vagyis ha egy kétdimenziós tóruszon értelmezhető komplex struktúrákat vizsgáljuk (lásd B.2 ábra). Ekkor a $\mathcal{T}_1$ Teichmüller-tér azonosítható a $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ komplex felső félsíkkal, míg a leképezési osztályok Γ_1 csoportja az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *moduláris csoporttal*, a 2x2-es, egész elemű és egységnyi determinánsú mátrixok csoportjával, melynek $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eleme

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{B.10}$$

alakú *lineáris törtfüggvény*ként hat a $\mathbb{H}$ felső félsíkon [1, 60, 64]. $g > 1$ esetén a $\mathcal{T}_g$ Teichmüller-tér (komplex) dimenziója $3g - 3$, és a leképezési osztályok csoportjának szerkezete, illetve hatása $\mathcal{T}_g$-n sokkal bonyolultabb. A Teichmüller-térnek egy, a permutációs orbifoldok tárgyalása szempontjából különösen alkalmas paraméterezése, az úgynevezett Fricke-koordinátázás, a később tárgyalandó uniformizációs tétel segítségével lehetséges.

B.2. Fedések és osztályozásuk

A fedés szó, sok más szakkifejezéshez hasonlóan, többféle jelentéssel bír még a topológián belül is. A jelen értekezésben fedés alatt a lokális homeomorfizmusokat értjük. Ezek szerint az X topologikus térnek egy *fedés*e egy olyan (Y, ϕ) pár, ahol Y egy topologikus tér, és ϕ egy olyan szürjektív és folytonos $\phi : Y \to X$ leképezés, amely kielégíti az alábbi feltételt: az X minden pontjának létezik olyan U környezete, melynek $\phi^{-1}(U)$ ősképe előáll olyan $W_i \subseteq Y$ diszjunkt nyílt halmazok uniójaként,

$$\phi^{-1}(U) = \bigcup_i W_i \ ,$$

amelyekre megszorítva ϕ-t egy $\phi_{W_i} : W_i \to U$ homeomorfizmust kapunk [49]. Belátható, hogy amennyiben X ívszerűen összefüggő, azaz bármely két pontja összeköthető folytonos görbével, akkor a $\phi^{-1}(x)$ halmazok számossága ugyanaz minden $x \in X$-re: ezt a számosságot hívjuk a fedés fokának, másszóval ez a *fedés leveleinek* a száma. Az X tér a fedés bázisa, Y a fedőtér, míg ϕ a fedőleképezés. Látható, hogy egy véges fokú fedés úgy is felfogható, mint egy olyan fibrált nyaláb, melynek fibruma (a fedés leveleinek halmaza) véges. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy az X bázis ívszerűen összefüggő.

A fenti definíciót több szempontból is pontosítanunk kell. Egyrészt fel szokták tételezni, hogy az Y fedőtér is összefüggő, sőt, ívszerűen összefüggő. A minket érdeklő alkalmazások szempontjából fontos szerepet fognak játszani olyan fedések is, amikor Y nem összefüggő, de ezek vizsgálata könnyen visszavezethető az összefüggő fedések vizsgálatára: valóban, az Y minden egyes (ívszerűen) összefüggő komponenséhez tartozik az X bázisnak egy összefüggő fedése, a teljes fedés ezekből rakható össze. Egy másik fontos észrevétel, hogy a fenti definíció a szó szoros értelmében csak az úgynevezett nemramifikált fedéseket öleli fel: a ramifikált, más elnevezéssel elágazó fedések esetén a fenti definíció csak egy diszkrét részhalmazon – a ramifikált (elágazási) pontok halmazán – kívül érvényes.

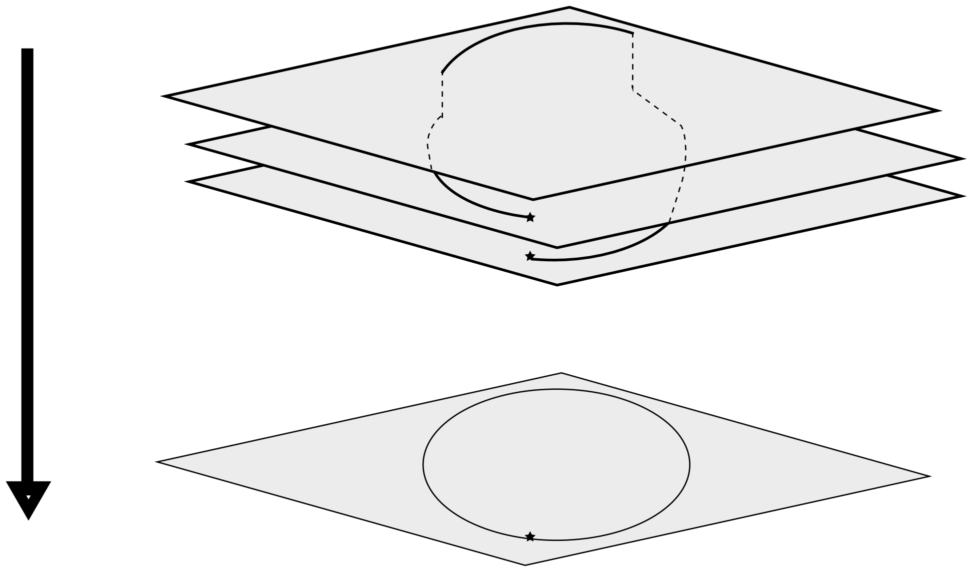
A fedések egyik alapvető tulajdonsága, hogy amennyiben adott a fedés bázisán egy komplex struktúra, akkor a fedés egyértelműen indukál egy komplex struktúrát a fedőtéren, és a fedőleképezés holomorf lesz erre az indukált komplex struktúrára nézve. Valóban, a fedőleképezésnek a bázis lokális koordinátáival vett kompozíciója lokális koordinátákat szolgáltat a fedőtéren, amelyek egy holomorf atlaszt alkotnak. Vagyis egy Riemann-felület fedőfelülete maga is egy Riemann-felület, amely konform ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározott.

Az X Riemann-felület $\phi_1 : Y_1 \rightarrow X$ és $\phi_2 : Y_2 \rightarrow X$ fedései ekvivalensek, amennyiben létezik olyan $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ biholomorf leképezés, amelyre igaz, hogy $\phi_2 \circ f = \phi_1$. A továbbiakban általában nem fogunk különbséget tenni ekvivalens fedések között. Egy $\phi : Y \rightarrow X$ fedés automorfizmusai az Y fedőfelület azon $f \in \mathrm{Aut}(Y)$ automorfizmusai, amelyekre $\phi \circ f = \phi$, ezek alkotják a fedés

$$\mathrm{Aut}(\phi) = \{f \in \mathrm{Aut}(Y) \mid \phi \circ f = \phi\} \tag{B.11}$$

automorfizmus-csoportját.

A fedések egy másik fontos tulajdonsága, hogy a bázis tetszőleges folytonos görbéje felemelhető a fedőfelületre [49]. Ez alatt a következőt kell érteni: amennyiben adott egy $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ folytonos görbe a fedés bázisán, melynek két végpontja $P = \alpha(0)$ és $Q = \alpha(1)$, akkor tetszőleges, az α görbe P kezdőpontja felett található $p \in \phi^{-1}(P)$ pont esetén létezik egy $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow Y$ folytonos görbe, amelyre igaz, hogy $\tilde{\alpha}(0) = p$ és $\phi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Világos, hogy



B.3. ábra. Az ábra a görbék felemelését szemlélteti egy véges levelű korlátlan fedés esetében. A fedés bázisának egy α zárt görbéjét felemelve egy olyan $\tilde{\alpha}$ görbét kapunk, amely általában már nem zárt, ugyanis két végpontja más-más levélen helyezkedhet el (bár e végpontok a bázis egyazon pontja felett találhatók). Viszont a kezdő- és a végpont relatív helyzete – vagyis melyik levélen található a végpont annak függvényében, hogy melyik levélen van a kezdőpont – már egyértelműen meghatározott, ezt jellemzi a fedés monodrómiája.

az $\tilde{\alpha}$ felemelt görbe $\tilde{\alpha}(1)$ végpontja az α görbe $Q = \alpha(1)$ végpontja felett helyezkedik el:

$$\tilde{\alpha}(1) \in \phi^{-1}(Q) \ .$$

Mi több, az $\tilde{\alpha}(1)$ végpont nem változik ha az α görbét úgy deformáljuk folytonosan, hogy végpontjait rögzítjük.

Tekintsünk most egy $\alpha : [0,1] \to X$ zárt görbét, melynek végpontjai megegyeznek: $\alpha(0) = \alpha(1) = P$. Legyen $\phi^{-1}(P) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ a P feletti pontok halmaza (a fedés minden levelén található egy pont P felett). A fentiek szerint minden $1 \leq i \leq n$ esetén létezik olyan $\tilde{\alpha}_i : [0,1] \to Y$ felemelése α-nak, amelyre $\tilde{\alpha}_i(0) = p_i$. Viszont semmi sem garantálja, hogy az $\tilde{\alpha}_i$ felemelések maguk is zárt görbék legyenek: általában nem is azok. Ez azt jelenti, hogy bár $\tilde{\alpha}_i(1) \in \phi^{-1}(P)$, azaz $\tilde{\alpha}_i(1) = p_j$ valamely $1 \leq j \leq n$-re, de általában $j \neq i$. Visszaemlékezve, hogy az i indexek a fedés leveleit különböztetik meg, látjuk, hogy minden α zárt görbéhez tartozik a fedés levelei halmazának egy önmagára történő $\phi^{\#}(\alpha) : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ leképezése, aminek bijektivitása könnyen belátható, vagyis egy permutációja a levelek halmazának. Mivel az α görbének a P kezdőpontot fixen hagyó folytonos deformációi nem befolyásolják az $\tilde{\alpha}_i$ felemelés végpontját, ezért valójában egy

$$\phi^{\#} : \pi_1(X, P) \to S_n \tag{B.12}$$

leképezést kapunk a bázis $\pi_1(X, P)$ fundamentális csoportjából a levelek permutációinak S_n csoportjába. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ez a leképezés egy homomorfizmus, vagyis műveletttartó:

$$\phi^{\#}(\alpha\beta) = \phi^{\#}(\alpha)\,\phi^{\#}(\beta)$$

bármely $\alpha, \beta \in \pi_1(X, P)$ párra. Mivel egy szimmetrikus csoportba képező homomorfizmus nem más mint egy permutációs hatás, ezért meggondolásaink eredményét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minden fedéshez hozzárendelhető a bázis fundamentális csoportjának egy $\phi^{\#}$ permutációs hatása a fedés leveleinek halmazán. Ezt a permutációs hatást nevezzük a ϕ fedés *monodrómia-hatásának*, és a képét (amely egy permutációcsoport) a fedés *monodrómia-csoportjának*. Vegyük észre, hogy bár a $\phi^{\#}$ definíciója függ a P bázispont választásától, egy másik bázispont esetén egy ekvivalens permutációs hatást kapunk (mivel a bázis ívszerűen összefüggő), azaz a monodrómia-hatás ekvivalencia-osztálya egyértelműen meghatározott.

Mint láttuk, Riemann-felületek tetszőleges ϕ fedéséhez hozzárendelhető annak $\phi^{\#}$ monodrómia-hatása, amely (ekvivalencia erejéig) egyértelműen meghatározott. Feltehető a fordított irányú kérdés: ha adott egy X Riemann-felület, és az X fundamentális csoportjának egy permutációs hatása, létezik-e az X-nek olyan fedése, amelynek monodrómia-hatása megegyezik a megadott permutációs hatással. A válasz a kérdésre igenlő: azt a speciális esetet, amikor a bázist a $\mathbb{CP}^1$ Riemann-gömbből véges sok pont elhagyásával kapjuk, szokás Riemann-féle egzisztenciatételnek nevezni. Az előzőek alapján nem csak a fedést, de a fedőfelület komplex struktúráját is egyértelműen meghatározza a monodrómia-hatás. Ezáltal megoldott a Riemann-felületek fedéseinek osztályozása: adott fokszámu fedések egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a bázis fundamentális csoportjának megfelelő fokú permutációs hatásainak ekvivalencia-osztályaival.

Ki kell emelnünk, hogy a fent kifejtett elgondolások abban az esetben is érvényesek, ha az Y fedőfelület nem (ívszerűen) összefüggő. Valóban, meggondolásaink során sehol sem tételeztük fel Y összefüggőségét. Könnyű belátni, hogy a fedőfelület összefüggősége esetén a monodrómia-hatás tranzitív, mert Y bármely két pontja összeköthető folytonos görbével. Amennyiben a monodrómia-hatás nem tranzitív, akkor egy-egyértelmű kapcsolat van a hatás pályái (vagy ami ugyanaz, a tranzitív összetevői) és a fedőfelület összefüggő komponensei között.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy (Y, ϕ) az X Riemann-felület egy összefüggő fedése, azaz Y ívszerűen összefüggő. Felmerül a kérdés, hogyan határozható meg a $\phi^{\#}$ monodrómia-hatás és a bázis $\pi_1(X)$ fundamentális csoportjának ismeretében a fedőfelület $\pi_1(Y)$ fundamentális csoportja. A válasz egyszerű: a fedőfelület összefüggősége miatt a monodrómia-hatás tranzitív, és az egyetlen pálya bármely i pontjának

$$\mathcal{S}_i = \left\{\alpha \in \pi_1(X) \mid \phi^{\#}(\alpha)\, i = i\right\} \tag{B.13}$$

stabilizátora izomorf a fedőfelület $\pi_1(Y)$ fundamentális csoportjával[1]. Mivel egy pálya (bármely pontja) stabilizátorának indexe megegyezik a pálya hosszával, ezért egy n levelű összefüggő fedés esetén $\pi_1(Y)$ a $\pi_1(X)$-nek egy n

[1] Mindegy, hogy melyik i pontot választjuk, mivel a különböző pontok stabilizátorai egymás konjugáltjai, ezért izomorfak egymással.

indexű részcsoportja. De a csoportelméletből ismert, hogy a g génuszú kompakt felület Π_g fundamentális csoportjának minden n indexű részcsoportja izomorf $\Pi_{n(g-1)+1}$-vel, vagyis ha az X bázis g génuszú kompakt felület, akkor az Y fedőfelület szintén kompakt, és indexe $n\,(g-1)+1$.

B.3. Az uniformizációs tétel

A Riemann-felületek elméletének egyik legfontosabb eredménye az *uniformizációs tétel* [22, 47, 49, 59]. E tétel szerint bármely Riemann-felület előáll

$$\Sigma/G \tag{B.14}$$

kvócienstérként, ahol Σ egy egyszeresen összefüggő Riemann-felület, és G a Σ automorfizmusainak egy diszkrét részcsoportja, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

Diszkontinuitás: Σ minden K kompakt részhalmazára $K \cap g\,(K) = \emptyset$, legfeljebb véges sok $g \in G$ csoportelem kivételével;

Fixpontmentesség: Σ minden pontjának van olyan U környezete, melyre $U \cap g\,(U) = \emptyset$ minden olyan $g \in G$ csoportelemre, amelyik különbözik a G egységelemétől.

Egy adott Riemann-felület Σ/G alakú előállításában szereplő Σ egyszeresen összefüggő Riemann-felületet a Σ/G *univerzális fedőfelületének*[2], míg a G csoportot a Σ/G felület *uniformizáló csoportjának* szokás nevezni. Egyszerűen belátható, hogy az uniformizáló csoport izomorf az uniformizált felület fundamentális csoportjával:

$$\pi_1\,(\Sigma/G) \cong G\ . \tag{B.15}$$

[2]Megjegyezzük, hogy néhány triviális esettől eltekintve ennek a fedésnek általában végtelen sok levele van.

Meg kell jegyezni, hogy a Σ/G előállítás nem teljesen egyértelmű: bár a Σ univerzális fedőfelület egyértelműen meghatározott (konform ekvivalencia erejéig), amennyiben a G_1 és G_2 uniformizáló csoportok egymás konjugáltjai $\mathrm{Aut}(\Sigma)$-ban, akkor a Σ/G_1 és Σ/G_2 felületek ekvivalensek. Vagyis nem maga az uniformizáló csoport, hanem csak annak $\mathrm{Aut}(\Sigma)$-beli konjugált osztálya van egyértelműen meghatározva.

Az uniformizációs tétel valódi jelentőségét az adja, hogy Riemann híres *leképezési tétele* következményeként ismert az összes egyszeresen összefüggő Riemann-felület (és azok automorfizmus-csoportjai). A tétel szerint mindössze három inekvivalens egyszeresen összefüggő Riemann-felület létezik, ezek rendre:

1. a $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemann-gömb;
2. a $\mathbb{C}$ komplex számsík;
3. a $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ komplex felső félsík.

A Riemann-gömb automorfizmusai a

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{B.16}$$

alakú lineáris törtfüggvények (*Möbius-transzformációk*), ahol a, b, c és d tetszőleges komplex számok, amelyekre $ad - bc = 1$, amiből következik

$$\mathrm{Aut}\big(\mathbb{CP}^1\big) \cong \mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{C}\right) \ . \tag{B.17}$$

Mivel $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{CP}^1\big)$-nek nincs olyan nemtriviális részcsoportja, amely eleget tenne az uniformizáló csoportokra vonatkozó (B.3) és (B.3) feltételeknek, ezért azonnal adódik, hogy az egyetlen Riemann-felület, melynek univerzális fedőfelülete a Riemann-gömb, maga a Riemann-gömb, vagyis a 0 génuszú modulus tér egy pontból áll.

A $\mathbb{C}$ komplex számsík automorfizmusai

$$z \mapsto az + b \tag{B.18}$$

alakú affin leképezések, ahol $a \in \mathbb{C}^{\times}$ és $b \in \mathbb{C}$. Ebben az esetben az $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ egy olyan részcsoportja, amely diszkontinuus és fixpontmentes, vagy triviális, vagy végtelen ciklikus (egy $z \mapsto z+a$ transzláció által generált), vagy izomorf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-vel, amikor is két, $z \mapsto z + a$ és $z \mapsto z + b$ transzláció generálja, ahol a és b hányadosa nem valós szám. Ennek megfelelően egy olyan Riemann-felület, melynek univerzális fedőfelülete a $\mathbb{C}$ komplex számsík, vagy maga a $\mathbb{C}$ számsík, vagy a $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontozott számsík, vagy egy komplex tórusz.

A $\mathbb{H}$ felső félsík automorfizmusai azon

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

lineáris törtfüggvények, melyek együtthatói valósak, vagyis $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, és teljesül $ad - bc = 1$, amiből azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \ . \tag{B.19}$$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ diszkontinuus és fixpontmentes részcsoportjait szokás *Fuchs-féle csoportoknak* nevezni: ezek adják ki a Riemann-felületek uniformizáló csoportjainak döntő többségét, tekintve, hogy a korábban felsorolt néhány esettől eltekintve minden Riemann-felület univerzális fedőfelülete a $\mathbb{H}$ felső félsík.

Az uniformizációs tétel ismeretében most már tárgyalhatjuk a Teichmüller-tér korábban megemlített *Fricke-koordinátázását* [60, 64]. Adott g génuszú felületek az uniformizációs tétel szerint Σ/G alakúak, ahol egyértelműen meghatározott mind a Σ univerzális fedőfelület (konform ekvivalencia erejéig), mind a G uniformizáló csoport (izomorfizmus erejéig, hiszen izomorf a $\mathit{\Pi}_g$ fundamentális csoporttal). Az uniformizáló csoport részcsoportja $\mathrm{Aut}(\Sigma)$-nak, így előállítható egy $\tau : \mathit{\Pi}_g \to \mathrm{Aut}(\Sigma)$ injektív homomorfizmus képe-ként: $\tau(\Pi_g) = G$. A τ homomorfizmusok adják a Teichmüller-tér Fricke-koordinátáit, pontosabban ezek konjugált osztályai, hiszen konjugált uniformizáló csoportok konform ekvivalens felületeket uniformizálnak. A τ Fricke-koordinátát egy $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$ automorfizmussal komponálva ugyanazon felületet uniformizáló csoportot kapunk: mivel a belső automorfizmusok hatása nyílvánvalóan triviális, ezért azonnal adódik, hogy a leképezési osztályok a fundamentális csoport külső automorfizmusainak felelnek meg, és hatásuk a Fricke-koordinátákon egyszerű kompozíció.

A $g = 0$ eset triviális, hiszen $\mathcal{M}_0$ egy pontból áll az előzőek szerint. A $g = 1$ esetben az univerzális fedőfelület $\mathbb{C}$, és az uniformizáló csoportot két kommutáló transzláció generálja: konjugálással mindig elérhető, hogy e két generátor a $z \mapsto z + 1$ és a $z \mapsto z + \tau$ transzlációk legyenek, ahol $\tau \in \mathbb{H}$ nem más, mint az uniformizált tórusz moduláris paramétere, és e megfeleltetés definiálja ez esetben a Fricke-koordinátát (amit magával a τ komplex számmal azonosíthatunk). A $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (irányítástartó) külső automorfizmusai jellemezhetők $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mátrixok segítségével, ezért ezek felelnek meg a leképezési osztályoknak, és hatásuk a τ Fricke-koordinátán

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \, .$$

Vagyis ebben az esetben a Fricke-koordináta a τ moduláris paraméter, a Teichmüller-tér a $\mathbb{H}$ komplex felső félsík, és a leképezési osztályok csoportja az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ moduláris csoport. $g > 1$ esetben az uniformizáló csoport az $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$-nak egy Π_g-vel izomorf részcsoportja, amit a $\tau : \Pi_g \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ Fricke-koordináta ír le, de a numerikus paraméterezés nem olyan nyilvánvaló mint a $g = 1$ esetben: egy lehetséges (redundáns) paraméterezés a kanonikus generátorok képeinek mátrixelemeit használja.

A Fricke-koordinátázás igazi előnye, hogy segítségével könnyen tárgyalható a fedések kérdése [10]. Mint azt a B.2 Függelékben láttuk, minden fedést jellemez a monodrómia-hatása, és a fedés összefüggő komponensei a monodrómia-hatás pályáinak felelnek meg. Egy adott összefüggő komponens fundamentális csoportja izomorf a megfelelő pálya stabilizátorával: valójában a stabilizátor, mint a fedés bázisát uniformizáló csoport részcsoportja, nem más, mint az adott összefüggő komponens uniformizáló csoportja. Másszóval, amennyiben a fedés bázisának Fricke-koordinátája τ, és a vizsgált összefüggő komponenshez tartozó ξ pálya stabilizátora G_ξ, akkor ezen összefüggő komponens τ_ξ Fricke-koordinátája a τ homomorfizmus megszorítása G_ξ-re:

$$\tau_\xi = \tau_{|G_\xi} \ . \tag{B.20}$$

C. Függelék

Véges csoportok duplái: struktúra, ábrázolások és karakterek

A jelen függelékben összefoglaljuk a véges csoportok dupláinak azon tulajdonságait, melyek nélkülözhetetlenek az értekezés egyes részeinek megértéséhez. Részletesebb ismertetésük hozzáférhető magyar nyelven is a szerző kandidátusi értekezésében [73].

Legyen G egy véges csoport, és tekintsük azt a $\mathcal{D}G$ egységelemes asszociatív algebrát a komplex számtest felett, amelyet olyan, $P(x)$-szel és $Q(x)$-szel jelölt, és a G csoport elemeivel indexelt elemek generálnak, amelyek minden $x, y \in G$-re eleget tesznek a

$$P(x)\,P(y) = \delta_{x,y} P(x) \tag{C.1}$$

$$\sum_{x \in G} P(x) = 1 \tag{C.2}$$

$$Q(x)\,Q(y) = Q(xy) \tag{C.3}$$

$$P(x)\,Q(y) = Q(y)\,P(x^y) \tag{C.4}$$

definiáló relációknak: utóbbiak szokásos elnevezése rendre *ortogonalitás, teljesség, műveletartás* és *ekvivariancia.*

Belátható, hogy az így definiált $\mathcal{D}G$ algebra, amit a G *csoport duplájának* szokás nevezni [38, 3, 4], véges dimenziós:

$$\dim \mathcal{D}G = |G|^2 \ , \tag{C.5}$$

ugyanis az algebrának (mint komplex lineáris térnek) egy bázisát alkotják a $P(x)\,Q(y)$ alakú elemek, ahol x és y végig fut a G csoport összes elempárján.

C.1. Ábrázoláselmélet

A $\mathcal{D}G$ egy ábrázolása a V lineáris téren nem más, mint egy $\mathcal{D}G \to \mathrm{End}(V)$ algebra-homomorfizmus. Ez annyit jelent, hogy egy ábrázolás minden egyes $x \in G$ elemhez két lineáris operátort rendel hozzá, amelyeket továbbra is $P(x)$-szel és $Q(x)$-szel jelölünk, és amelyek kielégítik a $\mathcal{D}G$ csoportdupla fent felsorolt (C.1-C.4) definiáló relációit. Ez többek közt azt jelenti, hogy (az ortogonalitás következményeként) a $P(x)$ operátorok egymásra ortogonális projektorok, amelyek $V_x = P(x)\,V$ képei kifeszítik a V lineáris teret (a teljesség miatt), más szóval egy egységfelbontást alkotnak. Ezzel szemben a $Q(x)$ operátorok ábrázolják a G csoportot a V lineáris téren (a művelettartás folyományaként), és a (C.4) *ekvivariancia-feltétel* a két fajta operátor hatását kapcsolja össze:

$$Q(x)\,V_y = V_{xyx^{-1}}$$

minden $x, y \in G$-re. Összefoglalva az elmondottakat, a $\mathcal{D}G$ egy ábrázolása úgy tekinthető, mint egy $A = (V_A, P_A, Q_A)$ hármas, ahol V_A egy lineáris tér, míg $P_A : G \to \mathrm{End}(V_A)$ és $Q_A : G \to \mathrm{GL}(V_A)$ két olyan leképezés, amely eleget tesz a (C.1-C.4) relációknak.

A kapcsolat az orbifold modellekkel többé-kevésbé nyilvánvaló. Valóban, egy orbifold modell $\mathcal{H}$ Hilbert-tere felbomlik az egyes $\mathcal{H}_x$ twistelt szektorok direkt összegére, $\mathcal{H} = \oplus\mathcal{H}_x$, amely twistelt szektorokat a G twist-csoport $x \in G$ elemei indexelik: a $P(x)$ operátorok nem mások, mint a $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_x$ projekciók, amelyek nyilván egy egységfelbontást alkotnak. Másrészt a G twist-csoport ábrázolódik a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, ezt az ábrázolást írják le a $Q(x)$ operátorok, és az $x \in G$ elemet ábrázoló operátor a $\mathcal{H}_y$ twistelt szektort a $\mathcal{H}_{xyx^{-1}}$ twistelt szektorba képezi, ami nem más, mint a (C.4) ekvivariancia-feltétel. Tömören megfogalmazva, egy G twist-csoportú orbifold modell Hilbert-tere a $\mathcal{D}G$ csoportdupla egy ábrázolását hordozza.

A csoportduplák ábrázoláselmélete sok szempontból hasonlít a csoportok jól ismert ábrázoláselméletére. Például, amennyiben adott a $\mathcal{D}G$ csoportduplának két, $A = (V_A, P_A, Q_A)$ és $B = (V_B, P_B, Q_B)$ ábrázolása, akkor e két ábrázolás $A \oplus B = (V_{A\oplus B}, P_{A\oplus B}, Q_{A\oplus B})$ direkt összege nem más, mint a $\mathcal{D}G$-nek azon $V_{A\oplus B} = V_A \oplus V_B$ feletti ábrázolása, melyben az ábrázolási operátorok rendre $P_{A\oplus B}(x) = P_A(x) \oplus P_B(x)$ és $Q_{A\oplus B}(x) = Q_A(x) \oplus Q_B(x)$. Könnyen belátható, hogy a direkt összeg egy kommutatív és asszociatív művelet a $\mathcal{D}G$ ábrázolásainak ekvivalencia-osztályain.

A $\mathcal{D}G$ egy ábrázolása *reducibilis*, amennyiben létezik nemtriviális invariáns altere, vagyis az ábrázolási térnek olyan altere, amelyet az összes $P(x)$ és $Q(x)$ operátor önmagára képez. Egy ábrázolás *irreducibilis*, amennyiben nem reducibilis. Belátható, hogy véges G csoport esetén a $\mathcal{D}G$ csoportduplának csak véges sok inekvivalens irreducibilis ábrázolása van, és érvényes Maschke híres tételének analogonja, miszerint minden ábrázolás felbomlik (sorrendtől eltekintve egyértelműen) irreducibilis ábrázolások direkt összegére. Más szóval, az irreducibilis ábrázolások ismeretében teljes mértékben ellenőrzésünk alatt áll a $\mathcal{D}G$ ábrázoláselmélete.

A direkt összeg mellett létezik egy másik ábrázolásokra értelmezett művelet, amely fontos szerepet tölt be a csoportok ábrázoláselméletében: ez a *tenzorszorzat*. A tenzorszorzat fizikai szempontból is alapvető szerepet játszik, hiszen egy összetett objektum Hilbert-terén a szimmetriacsoportnak az egyes összetevők Hilbert-terein megvalósuló ábrázolásainak tenzorszorzata lép fel, más szóval a tenzorszorzat a szimmetriák és a hozzájuk kapcsolódó megmaradó töltések kompozícióját írja le. Csoportduplák ábrázolásaira is létezik egy fizikailag motivált tenzorszorzat fogalom: ha $A = (V_A, P_A, Q_A)$ és $B = (V_B, P_B, Q_B)$ a $\mathcal{D}G$-nek két, a V_A és V_B lineáris terek feletti ábrázolása, akkor ezek $A \otimes B$ tenzorszorzata az a $V_{A\otimes B} = V_A \otimes V_B$ feletti ábrázolás, ahol az ábrázolási operátorok rendre

$$P_{A\otimes B}(x) = \sum_{z\in G} P_A(z) \otimes P_B\left(z^{-1}x\right) \tag{C.6}$$

és

$$Q_{A\otimes B}(x) = Q_A(x) \otimes Q_B(x) \ . \tag{C.7}$$

Belátható, hogy a fenti tenzorszorzat fogalom egy asszociatív és kommutatív műveletet definiál az ábrázolások ekvivalencia-osztályain, melynek egységeleme az egységábrázolás, vagyis azon egydimenziós ábrázolása $\mathcal{D}G$-nek, melyben $P(x) = \delta_{x,1}$ és $Q(x) = 1$ (ami nyilván irreducibilis, mint minden egydimenziós ábrázolás). Viszont – a csoportábrázolások esetétől eltérően – a tenzorszorzat kommutativitása nem egészen triviális: míg csoportábrázolások esetén a két különböző sorrendben vett tenzorszorzat ekvivalenciáját biztosító

$$\begin{aligned} R : V_A \otimes V_B &\;\to\; V_B \otimes V_A \\ a \otimes b &\;\mapsto\; b \otimes a \end{aligned}$$

operátor alakja univerzális, azaz független a tenzorszorzatban fellépő ábrázolásoktól, addig csoportduplák ábrázolásai esetén az ekvivalenciát biztosító úgynevezett *braiding-operátor* alakja [38, 3]

$$\begin{aligned} R_{AB} : V_A \otimes V_B &\;\to\; V_B \otimes V_A \\ a \otimes b &\;\mapsto\; \sum_{x\in G} Q_B(x)\, b \otimes P_A(x)\, a \ , \end{aligned} \tag{C.8}$$

ami nyilvánvalóan függ minkét fellépő ábrázolástól. Egy másik alapvető különbség, hogy míg R egy involució, azaz a négyzete az egységoperátor, addig ez általában nem teljesül R_{AB}-re. Ennek a ténynek fizikai szempontból messzemenő következményei vannak: míg csoportábrázolások többszörös tenzorszorzatain a megfelelő szimmetrikus csoport hat, és ezért az ezeket realizáló fizikai elméletek gerjesztései permutációs statisztikáknak (általában Bose-Einstein vagy Fermi-Dirac) tesznek eleget, a csoportduplák ábrázolásai esetében a szimmetrikus csoport szerepét az úgynevezett *fonatcsoport* veszi át, és ezért az ezen ábrázolásoknak megfelelő gerjesztések általánosított, úgynevezett fonat-statisztikáknak tesznek eleget (anyonok és általánosításaik).

A csoportábrázolások esetéhez hasonlóan értelmezhetjük a *fúziós szabály*ok fogalmát: az N_{pq}^{r} fúziós együttható azt mondja meg, hogy mekkora multiplicitással fordul elő az r irreducibilis ábrázolás a p és q irreducibilisek tenzorszorzatában. Szintúgy értelmezhető a konjugált – más elnevezéssel kontragrediens – ábrázolás fogalma is, amit az jellemez (irreduciblis ábrázolások esetében), hogy két irreduciblis tenzorszorzata akkor és csak akkor tartalmazza az egységábrázolást, ha a két irreduciblis egymás konjugáltja. Fizikai szempontból a kontragrediens ábrázolás a töltéskonjugált terek szimmetriáját írja le.

Mivel a tenzorszorzat kommutatív, ezért értelmes egy A ábrázolás önmagával vett $A \otimes A$ tenzorszorzatát felbontani egy $\vee^2 A$ szimmetrikus, és egy $\wedge^2 A$ antiszimmetrikus részre,

$$A \otimes A = \vee^2 A \oplus \wedge^2 A \ ,$$

bár ez a felbontás messze nem triviális annak folyományaként, hogy a braiding-operátor nem involutív. Eme szimmetrizálások segítségével értelmezhető csoportduplák irreduciblis ábrázolásaira a F*robenius–Schur-indikátorok* klasszikus fogalmának analogonja: egy irreduciblis ábrázolás Frobenius–Schur-indikátora $+1$, ha szimmetrizált négyzete tartalmazza az egységábrázolást; -1, ha az antiszimmetrizált négyzet tartalmazza azt; végül az indikátor értéke 0, ha se a szimmetrizált, se az antiszimmetrizált négyzet nem tartalmazza az egységábrázolást, más szóval ha az ábrázolás nem ekvivalens a konjugáltjával. A fenti definíció érdekessége, hogy ennek analógiájára sikerült a Frobenius–Schur-indikátorok fogalmát általánosítani tetszőleges konform térelméletekre [7].

A csoportábrázolások esetéhez hasonlóan, csoportduplákra is értelmezhető a *projektív ábrázolás* fogalma. Ennek részletei megtalálhatóak az irodalomban: itt nem ismertetjük, mivel a permutációs orbifoldok elméletében ezek nem játszanak szerepet. Alapvető különbség a két eset között, hogy míg a projektív csoportábrázolásokat a G csoportnak egy 2-kociklusa (pontosabban ennek kohomologia-osztálya) írja le, csoportduplák esetén egy 3-kociklus[1] lép ennek a helyére [38, 3, 4]. Ez végső soron arra vezethető vissza, hogy a csoportduplák ábrázolásai egy ún. kétdimenziós csoport ábrázolásainak felelnek meg.

C.2. Csoportduplák karakterei

A csoportok és csoportduplák ábrázoláselmélete közötti analógia egyik sarokköve, hogy az *ábrázolási karakter* fogalma általánosítható csoportduplák ábrázolásaira [4]. Az ábrázolási karakter fogalmának a jelentősége a csoportok ábrázoláselméletében közismert: a karakterek egyszerű, egyértelmű numerikus jellemzését szolgáltatják az ábrázolások ekvivalencia-osztályainak, és felhasználva az irreducibilis karakterekre vonatkozó ortogonalitási relációkat, az ábrázolási karakter ismeretében egyszerű válasz adható a legalapvetőbb ábrázoláselméleti kérdésekre, például könnyen meghatározható az adott karakter irreducibilis dekompoziciójában az egyes irreducibilisek multiplicitása, az irreducibilisek fúziós szabályai, vagy az elágazási szabályok [65, 77].

[1] A G csoport egy 3-kociklusa olyan $\phi : G^3 \to \mathbb{C}^\times$ leképezés, amely eleget tesz a

$$\phi(x_1, x_2, x_3)\,\phi(x_1, x_2x_3, x_4)\,\phi(x_2, x_3, x_4) = \phi(x_1x_2, x_3, x_4)\,\phi(x_1, x_2, x_3x_4)$$

kociklus-egyenletnek bármely $x_1, \ldots, x_4 \in G$ esetén.

A $\mathcal{D}G$ csoportdupla V_A lineáris tér feletti $A = (V_A, P_A, Q_A)$ ábrázolásának ψ_A karaktere definíció szerint a $P_A(x)\,Q_A(y)$ operátor nyoma:

$$\psi_A(x,y) = \mathrm{Tr}\,(P_A(x)\,Q_A(y)) \ . \tag{C.9}$$

Mint a definícióból kitűnik, a szokásos csoportkarakterekkel ellentétben a dupla ábrázolási karakterei nem egyes csoportelemekhez rendelnek egy komplex számot, hanem csoportelemek rendezett párjaihoz, azaz a dupla egy karaktere egy $G \times G \to \mathbb{C}$ függvény. Belátható, hogy a karakterek egyértelműen jellemzik a csoportduplák ábrázolásait, vagyis két ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens, ha karaktereik megegyeznek. Másik alapvető tulajdonságuk, amely könnyen következik a definícióból, hogy a karakterek additívak, vagyis egy direkt összeg karaktere az egyes összeadandók karaktereinek az összege:

$$\psi_{A\oplus B}(x,y) = \psi_A(x,y) + \psi_B(x,y) \ . \tag{C.10}$$

Az $A \otimes B$ tenzorszorzat karakterének kifejezése valamivel bonyolultabb alakot ölt:

$$\psi_{A\otimes B}(x,y) = \sum_{z\in G} \psi_A(z,y)\,\psi_B\left(z^{-1}x,y\right) \ , \tag{C.11}$$

amint az könnyen levezethető a definícióból.

Mint láttuk, a $\mathcal{D}G$ csoportdupla egy karaktere egy $\psi : G \times G \to \mathbb{C}$ függvény, de nem akármilyen (ahogy egy $\chi : G \to \mathbb{C}$ csoportkarakter sem tetszőleges komplex értékű függvény a csoporton, hanem osztályfüggvény, azaz konjugált csoportelemekhez ugyanazt az értéket rendeli): ugyanis egy ábrázolási karakter eleget tesz a

1. $\psi(x,y) = 0$ ha $xy \neq yx$;

2. $\psi(x^z, y^z) = \psi(x,y)$

feltételeknek minden $x, y, z, \in G$-re. A csoportkarakterekkel fennálló analógia alapján szokás a fenti két feltételt kielégítő $\psi : G \times G \to \mathbb{C}$ függvényeket (dupla) *osztályfüggvényeknek* nevezni. Az ábrázolási karakterek osztályfüggvény volta egyszerűen következik a nyom ciklikus voltából és az ábrázolási operátorok alaptulajdonságaiból. Valóban,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)Q\left(y\right)\right) &= \mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)P\left(x\right)Q\left(y\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)Q\left(y\right)P\left(x\right)\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)P\left(yxy^{-1}\right)Q\left(y\right)\right) = \delta_{x,yxy^{-1}}\mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)Q\left(y\right)\right)\ ,\end{aligned}$$

ahol az első lépésben $P\left(x\right)$ projektor voltát használtuk ki, a második lépésben a nyom ciklicitását, a harmadikban az ekvivariancia-feltételt, míg a negyedikben a projektorok ortogonalitását. Hasonló módon

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(P\left(x^{z}\right)Q\left(y^{z}\right)\right) &= \mathrm{Tr}\left(Q\left(z\right)^{-1}P\left(x\right)Q\left(y\right)Q\left(z\right)\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)Q\left(y\right)Q\left(z\right)Q\left(z\right)^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(P\left(x\right)Q\left(y\right)\right)\ .\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ábrázolási karakterekre az

$$\psi\left(x,y^{-1}\right) = \overline{\psi\left(x,y\right)} \tag{C.12}$$

összefüggés is igaz, ahol szokás szerint felülvonással jelöltük a komplex konjugálást, de ez a tulajdonság nem tartozik az osztályfüggvények általános jellemzői közé.

Egy G véges csoport $\mathcal{D}G$ duplájának osztályfüggvényei egy véges dimenziós lineáris teret alkotnak, melynek egy bázisát alkotják az irreducibilis ábrázolások karakterei. Valójában ennél sokkal többről van szó, ugyanis az irreducibilis karakterek egy ortonormált bázist alkotnak az osztályfüggvények terében a

$$\left\langle\psi_1,\psi_2\right\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x,y\in G}\overline{\psi_1\left(x,y\right)}\psi_2\left(x,y\right) \tag{C.13}$$

skalárszorzatra nézve. Az irreducibilis karakterek ortonormáltsága, azaz

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x,y}\overline{\psi_p\left(x,y\right)}\psi_q\left(x,y\right) = \delta_{p,q}\ , \tag{C.14}$$

ahol $\mathrm{Irr}\,(\mathcal{D}G) = \{\psi_1, \ldots\}$ jelöli $\mathcal{D}G$ inekvivalens irreducibilis ábrázolásainak karaktereit, speciális következménye egy sokkal általánosabb, az irreduciblis karakterekre vonatkozó úgynevezett általánosított *ortogonalitási relációnak*:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{z\in G}\psi_p\,(x,z)\,\psi_q\left(x,z^{-1}y\right) = \delta_{p,q}\frac{\psi_p\,(x,y)}{d_p}\ , \tag{C.15}$$

ahol $d_p = \sum_{x\in G}\psi_p\,(x,1)$ nem más, mint a megfelelő irreducibilis ábrázolás dimenziója[2].

A csoportkarakterek esetéhez hasonlóan, csoportduplák karaktereire is léteznek úgynevezett *második ortogonalitási relációk*, melyek alakja

$$\sum_{p\in\mathrm{Irr}(\mathcal{D}G)}\psi_p\,(x_1,y_1)\,\psi_p\,(x_2,y_2) = \sum_{z\in G}\delta_{x_2,x_1^z}\delta_{y_2^{-1},y_1^z}\ , \tag{C.16}$$

és amelyek fontos szerepet játszanak a csoportdupla ábrázolások moduláris tulajdonságainak analízisében.

Az irreducibilis karakterek ortonormáltsága segítségével egyszerű megoldás adható – a csoportábrázolások esetével analóg módon – az ábrázoláselmélet alapproblémájára: hogyan határozzuk meg egy adott ábrázolás irreducibilis dekompozíciójában fellépő irreducibilisek multiplicitásait? Valóban, ha ψ jelöli a vizsgált ábrázolás karakterét, melynek irreducibilis dekompozíciójában n_p multiplicitással fordul elő a p irreducibilis, akkor a karakterek additivitása miatt fennáll, hogy

$$\psi\,(x,y) = \sum_{p\in\mathrm{Irr}(\mathcal{D}G)} n_p\psi_p\,(x,y)\ \ .$$

Ebből azonnal adódik a (C.14) ortogonalitási reláció felhasználásával, hogy

$$n_p = \frac{1}{|G|}\sum_{x,y\in G}\overline{\psi_p\,(x,y)}\psi\,(x,y)\ \ , \tag{C.17}$$

[2] Valóban, $\sum_x \mathrm{Tr}\,(P\,(x)\,Q\,(1)) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{id}_V) = \dim V$.

ami könnyen számolható az irreducibilis karakterek ismeretében.

A multiplicitásokra vonatkozó fenti (C.17) eredmény, és a tenzorszorzat karakterére vonatkozó (C.11) képlet alapján egyszerű, zárt kifejezés adható a fúziós együtthatókra:

$$N_{pq}^{r} = \frac{1}{|G|} \sum_{x,y,z,\in G} \psi_p\left(x,z\right) \psi_q\left(y,z\right) \overline{\psi_r\left(xy,z\right)} \ . \tag{C.18}$$

Egy irreducibilis $\mathcal{D}G$ ábrázolás *Frobenius–Schur-indikátor*ának kifejezése az ábrázolási karakter segítségével már valamivel bonyolultabb:

$$\nu_p = \frac{1}{|G|} \sum_{x,y\in G} \delta_{xy,yx^{-1}} \psi_p\left(x,y^2\right) \ , \tag{C.19}$$

amit az R_{pp} braiding-operátor spektrális felbontása révén lehet belátni. Megjegyezzük, hogy érvényes az

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x,y\in G} \delta_{xy,yx^{-1}} \psi_p\left(x,y^2 z\right) = \frac{\nu_p}{d_p} \psi_p\left(x,z\right) \tag{C.20}$$

összefüggés, aminek a Frobenius–Schur-indikátorok és a Klein-palack amplitúdó kapcsolatának vizsgálatában van jelentősége.

Végezetül említsük meg a csoportduplák talán legfontosabb tulajdonságát: a hozzájuk rendelhető moduláris adatok létezését [38, 4, 33]. A fentebb tárgyalt tulajdonságok, elsősorban az ortogonalitási relációk segítségével megmutatható, hogy a

$$T_{pq} = \frac{1}{|G|} \sum_{x,y\in G} \overline{\psi_p\left(x,y\right)} \psi_q\left(x,xy\right) \tag{C.21}$$

és

$$S_{pq} = \frac{1}{|G|} \sum_{x,y\in G} \overline{\psi_p\left(x,y\right) \psi_q\left(y,x\right)} \tag{C.22}$$

kifejezésekkel értelmezett S és T mátrixok eleget tesznek a moduláris adatokra vonatkozó feltételeknek (lásd 5.2 alfejezet). Ez nem véletlen, a holomorf orbifoldok elmélete szerint ezek éppen a G twist-csoportú holomorf orbifoldok moduláris adatait szolgáltatják[3]. Valójában ennél sokkal többről van szó: a csoportdupla ábrázolásai egy moduláris tenzorkategóriát alkotnak, amely megegyezik a megfelelő holomorf orbifold modellre jellemző tenzorkategóriával.

[3]Egészen pontosan ez csak akkor igaz, ha a twist-csoport nem projektíven ábrázolódik a Hilbert-téren: projektív ábrázolások esetén bizonyos módosítások szükségesek, és twistelt csoportduplák ábrázolásait kell tekinteni.

Irodalomjegyzék

[1] T.M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, volume 41 of *GTM*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.

[2] B. Bakalov and A.A. Kirillov. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. AMS, Providence, 2001.

[3] P. Bantay. Orbifolds and Hopf algebras. *Phys. Lett.*, B245:477–479, 1990.

[4] P. Bantay. Orbifolds, Hopf algebras and the Moonshine. *Lett. Math. Phys.*, 22:187–194, 1991.

[5] P. Bantay. Higher genus characters of orbifolds. *Phys. Lett.*, B282:349–351, 1992.

[6] P. Bantay. Algebraic aspects of orbifold models. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:1443–1456, 1994.

[7] P. Bantay. The Frobenius-Schur indicator in Conformal Field Theory. *Phys. Lett.*, B394:87–88, 1997.

[8] P. Bantay. Characters and modular properties of permutation orbifolds. *Phys. Lett.*, B419:175–178, 1998.

[9] P. Bantay. Frobenius-Schur indicators, the Klein-bottle amplitude, and the principle of orbifold covariance. *Phys. Lett.*, B488:207–210, 2000.

[10] P Bantay. Orbifoldization, covering surfaces and uniformization theory. *Lett. Math. Phys.*, 57:1–5, 2001.

[11] P. Bantay. Permutation orbifolds. *Nucl. Phys.*, B633:365–378, 2002.

[12] P. Bantay. Galois currents and the projective kernel in Rational Conformal Field Theory. *JHEP*, 03:025, 2003.

[13] P. Bantay. The kernel of the modular representation and the Galois action in RCFT. *Commun. Math. Phys.*, 233:423–438, 2003.

[14] P. Bantay. On generalizations of Verlinde's formula. *J. Geom. Phys.*, 48:44–51, 2003.

[15] P. Bantay. Permutation orbifolds and their applications. *Fields Inst. Commun.*, 39:13–23, 2003.

[16] P. Bantay. Symmetric products, permutation orbifolds and discrete torsion. *Lett. Math. Phys.*, 63:209–218, 2003.

[17] P. Bantay. Mapping class group representations and Conformal Field Theory. In D.Bakic, G. Muic, P. Pandzic, and G. Peskir, editors, *Functional Analysis VIII*, 2005.

[18] P Bantay and P Vecsernyes. Mapping class group representations and generalized Verlinde formula. *Int. J. Mod. Phys.*, A14:1325–1336, 1999.

[19] P. Bantay and G. Zala. Ultrametric matrices and representation theory. *J.Phys.A:Math.Gen.*, 30:6811, 1997.

[20] K. Barron, C.Y. Dong, and G. Mason. *Commun. Math. Phys.*, 227:349, 2002.

[21] M. Bauer, A. Coste, C. Itzykson, and P. Ruelle. *J. Geom. Phys.*, page 134, 1997.

[22] A.F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *GTM*. Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[23] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional Quantum Field Theory. *Nucl. Phys.*, B241:333, 1984.

[24] R.E. Borcherds. Monstrous Moonshine and monstrous Lie superalgebras. *Invent. Math.*, 109:405, 1992.

[25] L. Borisov, M.B. Halpern, and C. Schweigert. *Int. J. Mod. Phys.*, A13:125, 1998.

[26] R. Brown. Higher dimensional group theory. In R. Brown and T.L. Thickstun, editors, *Low-dimensional topology*, number 48 in London Math. Soc. Lecture Note Series.

[27] A. Cappelli and G. D'Appollonio. Boundary states of c $=1$ and $3/2$ rational conformal field theories. *JHEP*, 02:039, 2002.

[28] A. Cappelli, C. Itzykson, and J. B. Zuber. The ADE classification of minimal and A_1^1 conformal invariant theories. *Commun. Math. Phys.*, 113:1, 1987.

[29] C. Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, volume 138 of *GTM*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1998.

[30] J.H. Conway and S.P. Norton. Monstrous Moonshine. *Bull. London Math. Soc.*, 11:308, 1979.

[31] A. Coste and T. Gannon. Remarks on Galois symmetry in rational conformal field theories. *Phys. Lett.*, B323:316–321, 1994.

[32] A. Coste and T. Gannon. Congruence subgroups and rational conformal field theory. *math.qa/9909080*, 1999.

[33] A. Coste, T. Gannon, and P. Ruelle. Finite group modular data. *Nucl. Phys.*, B581:679–717, 2000.

[34] J. de Boere and J. Goeree. *Commun. Math. Phys*, 139:267, 1991.

[35] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *GTM.* Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 2005.

[36] R. Dijkgraaf. Discrete torsion and symmetric products. *hep-th/9912101*, 1999.

[37] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, and H. Verlinde. *Commun. Math. Phys.*, 185:197, 1997.

[38] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 18B:60, 1990.

[39] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde. The operator algebra of orbifold models. *Commun. Math. Phys.*, 123:485, 1989.

[40] R. Dijkgraaf and E. Witten. *Commun. Math. Phys.*, 129:393, 1990.

[41] J.D. Dixon and B. Mortimer. *Permutation groups*, volume 163 of *GTM.* Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1996.

[42] L. Dixon, P. Ginsparg, and J.A. Harvey. Beauty and the beast: superconformal symmetry in a Monster module. *Commun. Math. Phys.*, 119:221, 1988.

[43] L.J. Dixon, D. Friedan, E.J. Martinec, and S.H. Shenker. The conformal field theory of orbifolds. *Nucl. Phys.*, B282:13–73, 1987.

[44] L.J. Dixon, J.A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B261:678–686, 1985.

[45] L.J. Dixon, J.A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds 2. *Nucl. Phys.*, B274:285–314, 1986.

[46] W. Eholzer. *Commun. Math. Phys.*, 172:623, 1995.

[47] H.M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *GTM*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[48] P. Forgács, Z. Horváth, L. Palla, and P. Vecsernyés. *Nucl. Phys.*, B308:477, 1988.

[49] O. Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *GTM*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[50] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer, New York, 1997.

[51] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman. *Vertex Operator Algebras and the Monster*.

[52] J. Frohlich, J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert. Duality and defects in Rational Conformal Field Theory. *hep-th/0607247*, 2006.

[53] J. Fuchs, A. Klemm, and M.G. Schmidt. *Ann. Phys.*, 214:221, 1992.

[54] J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert. Boundaries, defects and Frobenius algebras. *Fortsch. Phys.*, 51:850–855, 2003.

[55] J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert. Tft construction of RCFT correlators. IV: Structure constants and correlation functions. *Nucl. Phys.*, B715:539–638, 2005.

[56] J. Fuchs and C. Schweigert. *Nucl. Phys.*, B558:419, 1999.

[57] T. Gannon. Modular data: The algebraic combinatorics of conformal field theory. *math.qa/0103044*, 2001.

[58] T. Gannon. Monstrous Moonshine: the first twenty-five years. *Bull. London Math. Soc.*, 38:1, 2005.

[59] R.C. Gunning. *Riemann surfaces and generalized theta functions*, volume 91 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.

[60] R. Hain. Moduli of Riemann surfaces. *AG/0003144*, 2000.

[61] M.B. Halpern and C. Helfgott. *Int.J.Mod.Phys.*, A19:2233, 2004.

[62] S. Hamidi and C. Vafa. Interactions on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B279:465, 1987.

[63] Y.-Z. Huang. Vertex Operator Algebras, the Verlinde conjecture, and Modular Tensor Categories. *Proc.Natl.Acad.Sci.*, 102:5352, 2005.

[64] Y. Imayoshi and M. Taniguchi. *An introduction to Teichmuller spaces*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin-Tokyo, 1992.

[65] I.M. Isaacs. *Character theory of finite groups*, volume 22 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1977.

[66] G.J. Janusz. *Algebraic Number Fields*, volume 55 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York and London, 1973.

[67] A. Kerber. *Representations of Permutation Groups*. Springer, 1971.

[68] A. Klemm and M.G. Schmidt. *Phys. Lett.*, B245:53, 1990.

[69] N. Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97 of *GTM*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1993.

[70] O. Lunin and S. D. Mathur. Correlation functions for m(n)/s(n) orbifolds. *Int. J. Mod. Phys.*, A16S1C:967–969, 2001.

[71] O. Lunin and S. D. Mathur. Correlation functions for orbifolds of the type m(n)/s(n). *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 101:296–303, 2001.

[72] G. Moore and N. Seiberg. Classical and quantum Conformal Field Theory. *Commun. Math. Phys.*, 123:177, 1989.

[73] Bántay Péter. *Hopf-algebrai módszerek alkalmazása orbifold modellek vizsgálatában.* Kandidátusi értekezés, 1992.

[74] G. Pradisi, A. Sagnotti, and Ya. S. Stanev. The open descendants of nondiagonal SU(2) WZW models. *Phys. Lett.*, B356:230–238, 1995.

[75] A. Recknagel. Permutation branes. *JHEP*, 04:041, 2003.

[76] C. Schweigert, J. Fuchs, and I. Runkel. Categorification and correlation functions in Conformal Field Theory. *math.ct/0602079*, 2006.

[77] J.P. Serre. *Linear representations of finite groups*, volume 42 of *GTM.* Springer, Berlin-New York, 1977.

[78] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Iwanami Shoten and Princeton University Press, Princeton.

[79] R. Stanley. *Enumerative combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[80] J.G. Thompson. Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 11:352, 1979.

[81] M.P. Tuite. On the relationship between Monstrous Moonshine and the uniqueness of the Moonshine module. *Commun. Math. Phys.*, 166:495, 1995.

[82] V.G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, volume 18 of *Studies in Mathematics.* de Gruyter, Berlin, 1994.

[83] C. Vafa. Modular invariance and discrete torsion on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B273:592, 1986.

[84] T. Varga. *Lett.Math.Phys.*, 68:91, 2004.

[85] E. Verlinde. Fusion rules and modular transformations in 2d-conformal field theory. *Nucl. Phys.*, B300:360, 1988.

Ábrák jegyzéke

Tárgymutató