

Papp Gábor, Németh Judit

Magfizika

egyetemi jegyzet
fizika tanár szakos hallgatóknak

2003, ELTE, Budapest
átdolgozva 2019-ben

Tartalomjegyzék

1. Atommagok tulajdonságai	7
1.1. Az atommag alkotórészei	7
1.1.1. Magfizikai egységek	8
1.1.2. Tömeg	9
1.1.3. Spin	10
1.1.4. Mágneses momentum	10
1.1.5. Méret	10
1.1.6. Kötési energia	11
1.1.7. Erős kölcsönhatás	12
1.1.8. Mezonok	13
1.1.9. Bomló állapotok	13
1.1.10. Antirészek	15
1.2. Elemi részek	16
1.2.1. Szimmetriák és megmaradási tételek	17
1.2.2. Kölcsönhatások	20
1.2.3. Megmaradó mennyiségek	22
1.2.4. Az elemi részek rendszerezése	25
2. Magerők: kéttest rendszerek	35
2.1. Szórási állapotok	35
2.1.1. Hatáskeresztmetszet	36
2.1.2. A Schrödinger egyenlet gömbi polárkoordinátákban	38
2.1.3. Parciális hullámok módszere	40
2.1.4. Optikai tétel	42
2.1.5. Born képlet	44
2.1.6. Töltéseloszlás meghatározása nagyenergiás szórásban	45
2.1.7. Kicszerélődés	47
2.2. A kvantummechanikai kéttestprobléma	49

2.3.	Szórás potenciálgödörben	50
2.4.	Kötött állapotok	51
2.5.	A deuteron	53
2.5.1.	Centrális potenciál	53
2.5.2.	Pauli elv kétrészecske állapotban	55
2.5.3.	Spinfüggő potenciál	56
2.5.4.	A tenzorerő	57
2.6.	A magerők tulajdonságai a szórás alapján	59
2.6.1.	A nukleon-nukleon hatáskeresztmetszet kísérleti tulajdonságai	61
2.7.	A kétnukleon potenciál alakja a kísérletek alapján	64
2.8.	A kétnukleon potenciál alakja a szimmetriaelvek alapján	64
2.9.	Egy bozon kicserélő potenciálok	67
3.	Atommagok	69
3.1.	Atommagok tulajdonságai	69
3.1.1.	Csoportosítás	69
3.1.2.	Stabilitás	70
3.1.3.	Radioaktív izotópok	72
3.2.	Atommagok tulajdonságai	74
3.2.1.	Spin	74
3.2.2.	Mágneses dipól és elektromos kvadrupólmomentum	75
3.3.	Tömeg, kötési energia	77
3.4.	Mágikus számok, kvadrupólmomentum	79
3.5.	Méret, sűrűségeloszlás	79
3.6.	Izobár analóg állapotok	81
3.7.	Energianívók	81
4.	Magmodellek	83
4.1.	Kollektív modellek	84
4.1.1.	A cseppmodel	84
4.1.2.	Forgási módusok	85
4.1.3.	Rezgő módusok	86
4.2.	Egyrészecske modellek	88
4.2.1.	Fermi gáz modell	88
4.2.2.	Harmonikus potenciál	93
4.2.3.	A Woods-Saxon potenciál	96
4.2.4.	Spin-pálya csatolás	97

4.3.	Önkonzisztens tér	98
4.3.1.	A Hartree-Fock számolás	99
4.3.2.	Az egyrészeske energiák Hartree-Fock közelítésben . . .	101
4.3.3.	Potenciális energia Fermi gáz bázison	102
4.4.	A független részecskekép alkalmazhatósága	105
5.	Bomlások	109
5.1.	Gyenge kölcsönhatás	109
5.1.1.	A β bomlás Fermi elmélete	112
5.2.	Elektromágneses kölcsönhatás	115
5.3.	α bomlás	124
6.	Hasadás és fúzió	127
6.1.	Maghasadás	127
6.1.1.	Hasadási termékek	130
6.2.	Reaktorok	130
6.3.	Atombomba	133
6.4.	Magfúzió	133
7.	Nehézion fizika	137
7.1.	Közepes energia	137
7.2.	Relativisztikus ütközések	138
7.3.	Az anyag új fázisai	138
8.	Nukleáris asztrofizika	139
8.1.	Csillagfejlődés	139
8.1.1.	Viriál tétel	139
8.1.2.	A Nap energiatermelése	141
8.1.3.	A csillagokban lezajló magreakciók	142
8.1.4.	A csillagfejlődés menete	143
8.1.5.	A csillagfejlődés végállapotai	145
8.1.6.	Neutroncsillag	154
8.2.	Kozmológia	156
8.2.1.	A modern kozmológia kezdetei	156
8.2.2.	A newtoni Univerzum fejlődése	158
8.2.3.	Extrapoláció vissza	161
8.2.4.	Big Bang modell	163

8.2.5.	Az élet kialakulásának és az interstelláris közlekedésnek feltételei	165
9.	Alkalmazás	169
9.1.	Egészségügy	169
9.1.1.	Diagnosztika	169
9.1.2.	Radioaktív nyomkövetés	172
9.1.3.	Sugárkezelés	172
9.2.	Energiaipar	174
9.3.	Környezetvédelem	175
9.4.	Kormeghatározás	175
9.4.1.	Régészet	175
9.4.2.	Geológia	176
9.5.	Ipari alkalmazások	177
9.6.	(Nemzet)védelem	178
9.7.	Mössbauer effektus	179
9.8.	Informatika, adatfeldolgozás	180

1. fejezet

Atommagok tulajdonságai

1.1. Az atommag alkotórészei

Alkotórészek:

- "régi görögök": négy alapelem (víz, tűz, levegő, föld)
- Atomok: Az atom semleges részecske
- De az elemek valamiben különböznek egymástól, egy alapegység (H atom) közel egész számú "többszörösei".
- XIX. század: radioaktivitás felfedezése, Curie, Bequerel
- 1903, Rutherford, Soddy: az elemek átalakulnak: α és β bomlás.
- 1911, Rutherford: α részecskékkel szórát atommagot, az α részecskék egy része igen erősen visszaszóródik! Az atomban van egy igen kicsi, pozitív szóró centrum, melynek nagysága a $10^{-15}\text{m} = 1\text{ fm}$ tartományba esik, töltése pedig megegyezik az elem rendszámával.
- 1911, Thompson: Az atommag $A - Z$ elektronból és A pozitív töltésű részecskéből (proton) áll. A modell jól írja le a tömegszámot és rendszámot, ($m_p = m_H \gg m_e$) de a kvantummechanika kifejlődése kizárta ezt a modellt.
- 1911, Thompson: pontos tömegmérés: mágneses térben a mozgó részecskék eltérülnek, az e/m specifikus töltés szerint – izotópok mérése lehetséges!

- 1919, Aston: A periódusos rendszer végigmérése: az elemek egy vagy kevés izotópból állnak.
- 1919, Rutherford: Első magreakció, ${}^1_7\text{N}(\alpha, \text{p}){}^{17}_8\text{O}$ megmutatja, hogy az atommagban van proton.
- 1931, van de Graaf: az első (elektrosztatikus) gyorsító.
- 1932, Chadwick: neutron felfedezése, az atommag $A - Z$ neutronból és Z protonból áll. A neutron a protonhoz hasonló, de semleges részecske.
- 1935, Yukawa: a magerők mezonelmélete, a mezon megjósolása
- 1938, Hahn: neutron indukált hasadás
- 1940, spontán hasadás
- 1942, Fermi: első atomreaktor
- 1947, Powell, Lattes, Occhialini: a π felfedezése
- 1964, Gell-Mann és Zweig, kvark hipotézis: a proton, neutron és π nem elemi részecske, hanem kvarkokból épülnek fel.
- 1969, Stanfordi gyorsító: "modern Rutherford kísérlet", igen kis, tört töltésű szórócentrumok kimérése a protonban ("kvarkok").
- 1983, Glashow, Salam és Weinberg egyesíti a gyenge és elektromágneses kölcsönhatás elméletét (XIX. században Maxwell egyesíti az elektromosság és mágnesesség elméletét).
- XXI. század eleje, CERN/SPS, Brookhaven/RHIC: a kvarkanyag jelenlétének jelei.

1.1.1. Magfizikai egységek

A tipikus magfizikai távolság az $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, a tipikus energiaskála¹ az $1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ (megaelektronvolt), az az energia amire az elektron töltésével rendelkező részecske szert tesz egy millió volt feszültségkülönbségen áthaladva.

¹Atomfizikában az elektronok tipikus kötési energiája az atomban eV nagyságrendű. A magfizikai skála milliószorosa az atomi skálának.

A fénysebesség egységnek vételével ($c = 1$) az időt a távolság egységében, fm -ben mérjük (pontosabb jelölésként a fm/c -t is használják). $1 fm$ az az idő, ami alatt a fény vákuumban befut $1 fm$ utat, azaz $1 fm/c = 3 \cdot 10^{-24}$ s. Ugyancsak a fénysebesség egységeiben a tömeg és az energia azonos, ezért az atommagok tömegét MeV -ben adjuk meg.

Tömegskálának az atomi tömegegységet (atomic mass unit = AMU) is használják, ez a ^{12}C atom (azaz beleértve az elektronokat is) tömegének tizenketted része:

$$1u = 1.66054 \cdot 10^{-27} kg = 931.494 MeV. \quad (1.1)$$

1.1.2. Tömeg

A magok tömegét három fő módszerrel határozzák meg:

- Spektrométerek:
mágneses térben a q töltésű és m tömegű részecskére

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.2)$$

erő hat. Az \vec{E} elektromos térrel a részecskét felgyorsítják, majd a \vec{B} homogén mágneses térben az körpályára áll, mely körnek a sugara a q/m hányadostól, valamint a részecske impulzusától (sebességétől) függ. Ez utóbbi az elektromos térrel való gyorsítással állítható be, de megállapítható egy adott szakaszon való áthaladás idejével is. A töltés ismeretében a sugár mérésével a tömeg számolható. A módszer jelenlegi pontossága

$$\frac{\Delta M}{M} \approx 10^{-7} - 10^{-9}, \quad (1.3)$$

ami bőségesen elegendő az izotópok szétválasztására is.

- Bomlások:
bomlások során ha a keletkezett részecskék tömege ismert (részecskeazonosítás szükséges), és jól mérhető az energiájuk, akkor abból visszszámolható a bomló részecske tömege. A detektorok keV pontosan mérnek, ezért a módszer pontossága megegyezik az előbbi módszerével.
- Magreakciók:
az előbbi módszerhez hasonlít, a pontossága is hasonló. Egy $A(B, C)D$

reakciót tanulmányozunk (ez a jelölés az $A + B \rightarrow C + D$ reakciót jelöli magfizikában), amiből 3 résztvevő paramétereit ismerjük, valamint az összes részecske kinetikus energiáját. Ebből az energiamegmaradással kiszámolható a 4. résztvevő tömege.

1.1.3. Spin

Az atommagnak van impulzusmomentuma, ezáltal van mágneses momentuma. Ha ez kölcsönhat egy külső mágneses térrel, akkor a beállástól függően megváltozik az energiája, és így mérhető. A proton (és elektron) saját impulzusmomentuma $\hbar/2$, a belőlük felépülő atommagok spinje egész vagy félegész.

A Thompson modell alapján az atommagot A proton és $A - Z$ elektron, azaz összesen $2A - Z$ feles spinű részecske alkotja, így a mag spinjét (hogy egész, vagy félegész) pusztán a rendszám határozná meg. A mérések ennek ellentmondanak, a mag spinjét a tömegszám határozza meg!

1.1.4. Mágneses momentum

Mivel a mágneses momentum fordítottan arányos a tömeggel,

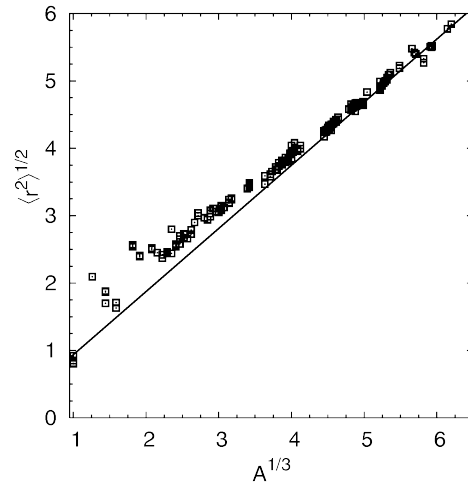
$$\vec{\mu} = g\mu_0 \frac{1}{\hbar} \vec{l}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (1.4)$$

az elektronok mágneses momentuma a 2000-szer kisebb tömeg miatt jóval nagyobb, mint a protoné vagy neutroné. A Thompson modell alapján a mag mágneses momentumát az elektronok határoznák meg, és az elektromágneses momentum nagyságrendjébe esne. Ezzel szemben a tapasztalat az, hogy a mag mágneses momentuma a proton mágneses momentum nagyságrendjében van! A képletben szereplő μ_0 a Bohr magneton elektron, illetve magmagneton proton vagy neutron esetén. Elemi részecskékre a g giromágneses faktor a kvantumrelativisztikus korrekcióktól eltekintve egész szám. Elektronra $g = 2.00232$, ami közel egész szám, míg protonra $g = 5.586$, neutronra $g = -3.826$ ami a proton és neutron összetett (nem elemi) voltára utal.

1.1.5. Méret

Rutherford kísérletei alapján az atommagok fm nagyságrendű sugárral jellemezhetők, mely az

$$R \approx 1.15 \text{ fm} \cdot A^{1/3} \quad (1.5)$$



1.1. ábra. A magok töltéseloszlásának kísérletileg mért átlagos sugara. A lineáris görbe az (1.5) közelítő képlet.

kifejezéssel közelíthető. A sugárnak ez a függése a tömegszámtól arra utal, hogy a magok sűrűsége közel állandó a periódusos rendszeren belül. A kísérletileg mért $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ értékeket és az (1.5) lineáris összefüggést az 1.1 ábra illusztrálja, és mutatja, hogy a közelítés a nagyobb magok esetében igazán jó. A magok méretének megállapításáról részletesebben a 2.1.6. fejezetben lesz szó.

1.1.6. Kötési energia

Egy adott térfogatba zárt részecske kinetikus energiája a kvantummechanika segítségével becsülhető. Az R sugáron belül levő részecske helybizonytalansága R , így a határozatlansági reláció alapján az impulzus bizonytalansága

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{R} \quad (1.6)$$

és az ebből származó kinetikus energia

$$E_{kin} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mR^2}. \quad (1.7)$$

Behelyettesítve a $\frac{\hbar^2}{2m_N} \approx 21 \text{ MeV fm}^2$, valamint az $R \sim 1 \text{ fm}$ értékét, protonokra $E \sim 20 \text{ MeV}$, míg elektronokra $E \sim 40000 \text{ MeV}$ értéket kapnánk².

²1 MeV = 10^6 eV

A Thompson modellben az atommagot a protonok és elektronok elektromos vonzása tartaná össze, azonban ennek erőssége az atomfizikai tapasztalatok alapján csak eV – keV nagyságrendbe esik, ami nem képes az előbbi nagy kinetikus energiát megkötni. Ebből következően az elektronok nem lehetnek az atommagban, és a magot nem az elektromos kölcsönhatás tartja össze.

Az (1.7) alapján megbecsülhető, hogy az elektromágneses erő mekkora sugáron belül képes megtartani az elektront, és ez körülbelül megadja az atom méretét.

A proton-neutron atommag modellel kapcsolatban két probléma volt:

- A szabad neutron 17 perc alatt elbomlik. Miért stabil az atommagban?
- Milyen erő tartja össze a pozitív protont és a semleges neutront?

1.1.7. Erős kölcsönhatás

Az atommagot összetartó kölcsönhatás, az elektromágneses kölcsönhatásnál jóval erősebb, ugyanakkor a hétköznapi szintjén nem vesszük észre. Ennek oka, hogy az erős kölcsönhatás *véges hatótávolságú*, azaz a magokon kívül már igen gyorsan lecseng.

Kölcsönhatás mai képe: a kölcsönható részecskék egymás között „kicserélnek” egy közvetítő részecskét. Ez a részecske nem valódi, hanem virtuális, azaz kvantummechanikai energiabizonytalansággént jelenik meg. Az elektromágneses kölcsönhatást a foton közvetíti, mi közvetíti az erős kölcsönhatást, és mi a közvetítő részecske tulajdonságai?

Az energiabizonytalanságnak át kell hidalnia az erős kölcsönhatás hatótávolságát. Tegyük fel, hogy a részecske fénysebességgel terjed,

$$R = c\tau \approx c \frac{\hbar}{2\Delta E} \quad (1.8)$$

Amennyiben a közvetítő részecske tömeggel rendelkezik, akkor

$$\Delta E = mc^2 \quad (1.9)$$

azaz

$$R \sim \frac{\hbar}{2mc} \quad (1.10)$$

összefüggés áll fenn a hatótávolság és a közvetítő részecske tömege között. Zérus tömegű közvetítő részecskéhez végtelen hatótávolság tartozik, a magerők hatótávolságához

$$m \sim \frac{\hbar}{2Rc} = \frac{200\text{MeV fm}}{2fm} = 100\text{MeV}. \quad (1.11)$$

A közvetítő részecske a π mezon (pion) kísérletileg mért tömege 140 MeV, igen közel van a becsléshez.

1.1.8. Mezonok

Yukawa mezonelméletének bizonyítására 1937-ben Anderson kozmikus sugárzásban keresett részecskéket, és talált is egy negatív töltésű, 103 MeV tömegű részecskét. Később kiderült, hogy ez a müonnak nevezett részecske inkább az elektronnal mutat rokonságot, be tud fogódni elektronpályákra, és nem a π mezon. A müon bomlik, $\tau \sim 2 \cdot 10^{-6}$ s felezési idővel.³

Mivel a π mezont nem találták a földön a kozmikus sugárzásban, feltételezték, hogy a müonnál is gyorsabban bomlik, és a felső atmoszférában kell keresni. 1947-ben Powell a felső atmoszférába küldött fotoemulziót vizsgálva megtalálta a pion nyomait, a pion müonokra bomlott, és ezeket figyelték meg a földön. A pion 140 MeV tömegű, háromféle van belőle: pozitív, semleges és negatív töltésű. A töltött pionok 10^{-8} s alatt, a semleges 10^{-16} s alatt bomlik.

1.1.9. Bomló állapotok

Egy N bomló részecskéből álló halmazban a részecskék egymástól függetlenül bomolhatnak, valamely, időtől független valószínűséggel. Az N részecskéből így időegység alatt

$$dN = -\lambda N(t) dt \quad (1.12)$$

bomlik el, amiből a még el nem bomlott részecskék száma

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1.13)$$

A bomlás félélettartama az az idő, ami alatt az eredeti részecskék fele elbomlott,

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad (1.14)$$

³A müonok a kozmikus sugárzás hatására az atmoszféra tetején keletkeznek. Mivel $2 \cdot 10^{-6}$ s alatt még fénysebességgel is csak 600 m-re jutnának, és nem észlelhetnénk őket a Föld felszínén, megfigyelésük a speciális relativitáselmélet egyik kísérleti bizonyítéka: a bomlási idő a részecske sajátrendszerében értendő, és egy közel fénysebességgel mozgó részecske esetében a külső (földi) megfigyelő számára az idődilatáció révén ez $t = \tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ időnek felel meg, ami alatt a müon átmehet a néhányszor 10 km vastag atmoszférán.

míg átlagos élettartamnak a részecske várható élettartamát nevezzük,

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{\int dt t e^{-\lambda t}}{\int dt e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.15)$$

Vizsgáljunk meg a következőkben egy kvantummechanikai részecskét, energia sajátállapotban. A részecske hullámfüggvénye

$$\Psi(t) = \Psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}, \quad (1.16)$$

míg megtalálási valószínűsége

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 e^{\frac{2t}{\hbar} \text{Im} E} \quad (1.17)$$

Látjuk, hogy amennyiben az energia valós, akkor a részecske megtalálási valószínűsége állandó, a részecske nem bomlik. Bomló részecskéhez komplex energia tartozik,

$$E = E_0 - \frac{i}{2} \Gamma, \quad (1.18)$$

ahol $\Gamma = \lambda \hbar$, és a részecske hullámfüggvénye

$$\Psi(t) = \Psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} e^{-\frac{\lambda}{2} t} \quad (1.19)$$

Mivel minden függvény felírható adott frekvenciájú rezgések összegeként (Fourier transzformált),

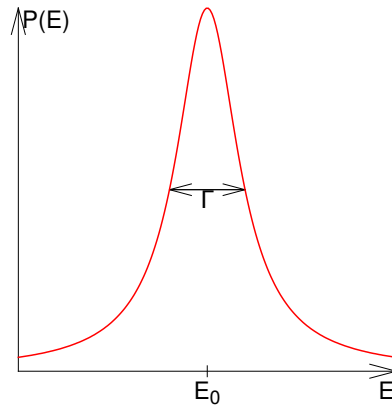
$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

kiszámolhatjuk, hogy mekkora a különböző frekvenciák amplitúdója,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Psi(t) e^{i\omega t}. \quad (1.21)$$

Tegyük fel, hogy a részecske $t = 0$ -ban elbomlott, és használjuk az $E = \hbar\omega$ jelölést. Ekkor az amplitúdók a

$$g(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi(0) \int_{-\infty}^0 dt e^{\frac{i}{\hbar}(E-E_0)t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} = \frac{\Psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma} \quad (1.22)$$



1.2. ábra. Breit-Wigner eloszlás

eloszlást követik. Egy valós E energiájú állapot valószínűségét a bomló állapotban a

$$P(E) = |g(\omega)|^2 = \frac{\frac{\Gamma}{2\pi}}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (1.23)$$

Breit-Wigner formula írja le. Egy bomló részecskékből álló rendszer részecskéinek energiáját mérve egy ilyen, az 1.2. ábrához hasonló eloszlást mérünk, amiből megállapítható mind az E_0 alapenergia, mind az eloszlás Γ szélessége. Innen a bomlási idő a $\tau = \hbar/\Gamma$ összefüggéssel kiszámolható.

1.1.10. Antirészek

A feles spinű fermionok relativisztikus Dirac egyenletének négy megoldása van. Ebből kettő a spin kétféle beállításának felel meg, és ezekért a megoldásokért dolgozta ki Dirac az egyenletet. Azonban elmélete mindkét spinbeállásra megjósolt még egy-egy érdekes állapotot, melyeknek negatív az energiája,

$$E = \pm \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \quad (1.24)$$

Mivel szabad részecskére impulzusa tetszőleges lehet, végtelen sok állapot van mind a pozitív, mind a negatív energiájú tartományban. A két tartományt egy $2mc^2$ nagyságú energiaszakadék választja el.

A második főtételek értelmében minden részecskék a mélyebb energiájú állapotba igyekeznek. Mivel ennek ellenére vannak pozitív energiájú fermionok, Dirac

feltételezte, hogy a negatív energiájú állapotok mind foglaltak (Dirac tenger). Mivel fermionokról van szó, a Pauli elv értelmében egy kvantumállapotban csak egy részecske lehet, és aki nem fért be a negatív energiába, pozitív energiával rendelkezik.

Ha egy negatív energiájú állapotban levő részecske elég nagy ($> 2mc^2$) energiát kap, akkor átkerülhet a pozitív energiájú tartományban. Helyén egy "lyuk" marad, melynek minden tulajdonsága éppen az ellenkezője a részecske tulajdonságának: ellenkező a töltése, a spinje, az energiája (a tömege egyezik). Dirac ezeket az *antirészecskéket* azonosította ezek után egyenlete negatív energiájú megoldásaival, így a Dirac egyenlet pozitív energiájú részecskéket és pozitív energiájú antirészecskéket ír le. Ha egy részecske és egy antirészecske találkozik, akkor megsemmisülnek, és a felszabaduló energia szétsugárzódik (egy pozitív energiájú állapot lekerül a Dirac tengerbe, az antirészecske által hagyott lyuk helyébe).

1928-ban Anderson kozmikus sugárzásban azonosította az elektron antirészecskéjét, a pozitront. Mágneses térben az elektronhoz hasonlóan görbült a pályája, de ellenkező irányban.

Innen egyenesen vezetett az út annak feltételezéséhez, hogy minden részecskének van antirészecskéje, van antiproton, antineutron, sőt a bozonoknak⁴ is van antirészecskéje. Az antirészecskék egy része megegyezhet a már ismert részecskékkel, a foton antirészecskéje például önmaga, a pozitív pion antirészecskéje a negatív töltésű pion.

Az antirészecskék fő tulajdonságaikban ugyanolyan tulajdonságokkal bírnak, mint a "rendes" részecskék, egy antirészecskéből álló hidrogénatomot messziről megfigyelve a színképe alapján nem tudunk megkülönböztetni a "rendes" társától. Egy távoli galaxis felépülhet antianyagból⁵ is, és fő fizikai jellemzői alapján nem tudnánk megkülönböztetni egy szokásos anyagból felépített galaxistól.

1.2. Elemi részek

Mint láttuk, az atommagok nem elemiek, hanem összetett részek, protonok és neutronok kötött állapotai. Azonban a történelem során eleminek tekintették őket, azaz, vannak olyan körülmények, amikor elemi részecskéknek tekinthetők. Ál-

⁴egész spinű részecskék, mint pl. a foton, a mezonok.

⁵Hosszú távon nem épülhet fel minkét fajta anyagból, mivel azon közel kerülve megsemmisítik egymást és szétsugárzódnak. Mai ismereteink szerint a Világegyetem anyagának döntő többsége rendes anyag, ami azt jelenti, hogy a Világegyetem nem szimmetrikus az anyag és antianyag tekintetében.

talában a megfigyeléshez használt energia (impulzus) nagysága határozza meg, mikor tekinthetünk egy összetett objektumot is „elemi”nek. Atomfizikai energiákon (pár eV) az atommag nem mutat szerkezetet, mivel nincsen olyan belső gerjesztése, mely ebbe az energiatartományba esne. Magasabb energián (pl. MeV) azonban kiderül, hogy az atommagnak szerkezete, és különböző gerjesztési nívói vannak. Még magasabb energián kiderül, hogy a proton és a neutron sem elemi részecskék, hanem még elemibb összetevőkből, a kvarkokból álló kötött rendszerek.

A klasszikus magfizika szempontjából az elemi részek az atommagokat alkotó részecskék (proton és neutron), valamint a magreakciókban megjelenő, hosszabb-rövidebb ideig élő részecskék. A tapasztalat szerint a legtöbb ilyen, eleminek tekintett részecske bomlik, azaz a kivételes helyzet a természetben az, ha egy részecske stabil. Mivel a termodinamikai második főtétele alapján egy részecske mindig megpróbál kisebb tömegű (és több⁶) részecskére bomlani, egy megfigyelt stabilitást valamivel meg kell magyarázni. A legkézenfekvőbb feltevés az, hogy egy megmaradási tétel akadályozza meg a stabil részecskék elbomlását.

1.2.1. Szimmetriák és megmaradási tételek

A természetben a legtöbb szimmetria közvetlen kapcsolatban áll a megmaradási tételekkel. A szimmetriák tanulmányozása igen sokat segített a természeti jelenségek megértésében is, ismeretükben el lehet dönteni egy folyamatról, hogy végbemehet-e a természetben.

Az egyik legegyszerűbb összefüggés az ún. eltolási invariancia és az impulzus megmaradása között van. Az eltolási invariancia azt jelenti, hogy ha vizsgált rendszerem **összes** helyvektorát eltolom ugyanazzal az állandó vektorral, a rendszer viselkedése nem változik. Egy bomlás például ugyanúgy játszódik le pillanatnyi tartózkodási helyünkön, és a Föld túloldalán.

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk meg egy kéttest rendszert, ahol a két test az \vec{r}_1 , illetve \vec{r}_2 helyen foglal helyet. Az eltolásra a $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ relatív helyvektor érzéketlen, azaz eltolási invariancia esetén a V potenciál csak a relatív helyzettől függhet. A mozgásegyenletek alapján

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ \dot{\vec{p}}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\end{aligned}\tag{1.25}$$

⁶Ezáltal nő az entrópia

és ezáltal a teljes $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ impulzus megváltozása

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0, \quad (1.26)$$

ami pont az impulzus megmaradását fejezi ki.

Hasonlóképpen megmutatható, hogy az időeltolási invariancia az energiamegmaradásnak feleltethető meg⁷,

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] = \frac{\vec{p}_1 \dot{\vec{p}}_1}{m_1} + \frac{\vec{p}_2 \dot{\vec{p}}_2}{m_2} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \dot{\vec{r}}_1 + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} \dot{\vec{r}}_2 \\ &= \frac{\vec{p}_1}{m_1} \left[\dot{\vec{p}}_1 + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \right] + \frac{\vec{p}_2}{m_2} \left[\dot{\vec{p}}_2 + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

mivel az utolsó sor zárójelben levő kifejezése éppen az (1.25) mozgásegyenletek.

Kvantummechanikai operátorok

Az eltolási invarianciát megfogalmazhatjuk a kvantummechanika nyelvén is. Az eltolás operátora az \vec{r} helyen vett ψ hullámfüggvényt az $\vec{r} + \vec{a}$ helyre transzformálja,

$$T(\vec{a})\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}). \quad (1.28)$$

Kis $d\vec{a}$ eltolás esetén a jobb oldal sorba fejthető,

$$T(d\vec{a})\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) + d\vec{a} \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial \vec{r}} + \dots = \left(\mathbf{1} + d\vec{a} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dots \right) \psi(\vec{r}). \quad (1.29)$$

Elvégezve a kvantummechanika szokásos $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \rightarrow \frac{i}{\hbar} \vec{p}$ helyettesítését, kapjuk, hogy

$$T(d\vec{a}) = \left(\mathbf{1} + \frac{i}{\hbar} \vec{p} d\vec{a} + \dots \right) \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} d\vec{a}}, \quad (1.30)$$

ahol a ... helyén levő tagok tovább folytatják az exponenciális sort. Mivel véges nagy eltolás előállítható kis eltolások sorozataként, ezért

$$T(\vec{a}) = \prod_{d\vec{a}} T(d\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \Sigma d\vec{a}} = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{a}} \quad (1.31)$$

⁷Ehhez most nem kell feltételeznünk, hogy a rendszer eltolásinvariáns is.

az eltolás általános operátora.

Amennyiben a rendszer eltolási invarianciával rendelkezik, akkor pl. a Hamilton operátorra igaz, hogy

$$\begin{aligned} H(\vec{r}, \vec{p})\psi(\vec{r}) &= T(\vec{a})H(\vec{r}, \vec{p})\psi(\vec{r}) \\ &= H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p})\psi(\vec{r} + \vec{a}) = H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p})T(\vec{a})\psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

és $H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p}) = H(\vec{r}, \vec{p})$, azaz

$$T(\vec{a})H(\vec{r}, \vec{p}) = H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p})T(\vec{a}) = H(\vec{r}, \vec{p})T(\vec{a}). \quad (1.33)$$

Ez azt jelenti, hogy az eltolás operátora felcserélhető a Hamilton operátorral, és mivel explicit módon nem függ az időtől, ezért mozgásállandó. Mivel minden rögzített eltolásra $T(\vec{a})$ csak az impulzustól függ, ezért ez egyben az impulzus megmaradását fejezi ki.

Az energiamegmaradás szerepe a kvantummechanikában a hullámfüggvény időfeljődésével szemléltethető, az időfejlesztő operátor (az eltolás operátor mintájára) $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ alakú, és időfüggetlen Hamilton operátor esetén (időeltolásra invariáns rendszer) felcserélhető a Hamilton operátorral. Újfent, egy csak az energiától függő operátor megmarad, így az energia is megmaradó mennyiség.

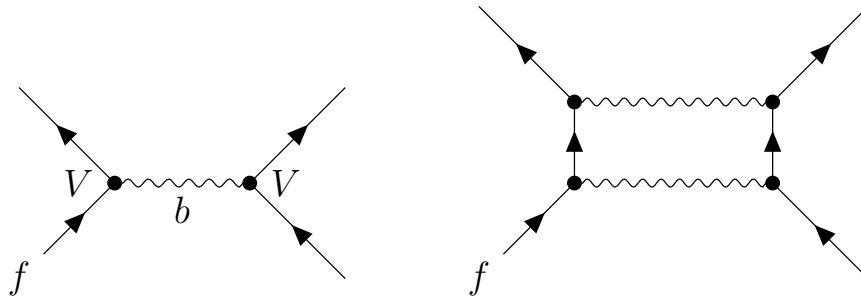
Hasonlóképpen belátható, hogy az impulzusmomentum megmaradása a tér izotrópiájával van összefüggésben, ha a fizika folyamatok nem függenek attól, hogy a rendszerben minden koordinátát elforgatunk *ugyanazzal* a szöggel, akkor a rendszer impulzusmomentuma megmarad.

Egy másik érdekes szimmetria a hullámfüggvény fázisához tartozik. A hullámfüggvényt mindig megszorozhatom egy globális fázisfaktoral, és ettől a fizikai mennyiségek nem változnak. Az ehhez a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiség meglepő módon a töltés,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int |\Psi|^2 dV &= \int \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dV \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \left(\Psi \hat{H}^* \Psi^* - \Psi^* \hat{H} \Psi \right) dV. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Mivel $\hat{H} = \hat{H}^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r})$, és $\Psi\Delta\Psi^* - \Psi^*\Delta\Psi = \text{div}(\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi)$, azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{d}{dt} \int |\Psi|^2 dV = - \int \text{div} \vec{j} dV = - \oint \vec{j} d\vec{f} \quad (1.35)$$



1.3. ábra. Egy tipikus kölcsönhatás: két fermionikus részecskéhez csatolódik egy bozonikus részecske (bal ábra). A kölcsönhatás a két V -vel jelölt pontokban történik. Jobb ábra: dupla kölcsönhatás. Az idő felfelé folyik.

ahol $\vec{j} = \frac{\hbar}{m} |\Psi|^2 \vec{\nabla} \alpha$, ahol α a hullámfüggvény fázisa. Az (1.35) azt fejezi ki, hogy a vizsgált térfogattól nem folyik ki áram, azaz, benne a töltés megmarad.

A fenti összefüggéseket a szimmetriák és a megmaradó mennyiségek között a **Noether tétel**⁸ fogalmazza meg: *Minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó mennyiség.* A Noether tétel konkrétan meg is mutatja, hogyan kell a megmaradó mennyiséget a szimmetria ismeretében megkonstruálni.

1.2.2. Kölcsönhatások

A kölcsönhatások mai elméletét mutatja be az 1.3 ábra. A kölcsönhatás során a fermionikus részecskék (anyag) bozonikus közvetítő részecskéken (kölcsönhatás) keresztül hatnak kölcsön. Egy közvetítő részecske kibocsátásának erőssége, az ún. csatolási állandó, függ a kölcsönhatás típusától. A legjobban tanulmányozott kölcsönhatás, az elektromágneses esetén, az anyagi részecske például az elektron, a közvetítő részecske pedig a foton. A dimenziótlan csatolási állandó $\frac{e^2}{\hbar c} \approx 1/137$, viszonylag kicsi. Ennek a következménye, hogy a magasabb rendű folyamatok, amikor két elektron nem egy, hanem két (ld. 1.3 jobb ábra), vagy több fotonnal hat kölcsön, viszonylag gyengék, és a kölcsönhatás a perturbációszámítás módszerével leírható.

A dimenziótlan csatolási állandó alapján becsülhetjük a különböző kölcsönhatásokat. A négy ismert kölcsönhatás tipikus erőssége a következő:

A kölcsönhatás következtében bomló részecskék bomlásideje szintén erősen

⁸A tétel Amalie Emmy Noether-ről, az egyik első női matematika professzorról van elnevezve.

Kölcsönhatás	Erősség
Erős	1
Elektromágneses	10^{-2}
Gyenge	10^{-12}
Gravitációs	10^{-44}

1.1. táblázat. Az ismert kölcsönhatások, és erősségük.

függ a kölcsönhatás jellegétől. Az átmenet (a bomló részecske átalakulását a bomlástermékekbe) erősségét a kvantummechanikából levezethető Fermi arany-szabály határozza meg,

$$w_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\beta|H_{kh}|\alpha\rangle|^2 \varrho(E) \quad (1.36)$$

ahol $|\alpha\rangle$ a kiinduló állapot, míg $|\beta\rangle$ a végállapot hullámfüggvénye, H_{kh} a Hamilton operátor kölcsönhatást leíró része, végül $\varrho(E)$ egy statisztikus faktor, a végállapotsűrűség, mely az E energia körüli energiaszintek számát adja meg (és emiatt arányos az állapot entrópiájával).

Mivel a Hamilton operátor kölcsönhatást leíró része, H_{kh} arányos a dimenziótlan csatolási erősséggel, ezért a $\langle\beta|H_{kh}|\alpha\rangle = \int dV \Psi_{\beta}^* H_{kh} \Psi_{\alpha}$ mátrixelem annál nagyobb, minél erősebb a kölcsönhatás, és ezáltal az átmenet is annál gyorsabb lesz.

Ennek alapján az erős kölcsönhatással történő bomlás tipikusan 10^{-22} s alatt zajlik le, az elektromágneses 10^{-16} s alatt, míg a gyenge $10^{-10} - 10^{-6}$ s alatt. Természetesen ezek hozzávetőleges értékek, a neutron bomlása gyenge kölcsönhatással ennél lényegesen lassabban, 17 perc alatt történik (pl. a végállapotsűrűség igen kis értéke miatt).

Mivel ha valami elbomolhat erős kölcsönhatással, az olyan gyorsan történik, hogy a többi (pl. az elektromágneses) kölcsönhatásnak esélye sincsen ennyi idő alatt. Ezért ha valami nem bomlik erősen, akkor valamilyen megmaradási törvény tiltja az a bomlást. Ha ezek után elektromágnesesen sem tud elbomlani, akkor van esélye a gyenge kölcsönhatásnak, és ha úgy sem megy, akkor a részecske stabil.

A különböző kölcsönhatásoknak különbözőek lehetnek a szimmetria tulajdonságai, és a bomlások tanulmányozása segít ezeket feltérképezni.

1.2.3. Megmaradó mennyiségek

Az eddig tárgyalt mennyiségek közül minden kölcsönhatásban megmarad az

- energia
- impulzus
- impulzusmomentum
- elektromos töltés (az elektron nem bomlik, mivel ő a legkönnyebb töltött részecske).

További mennyiségek:

Paritás: A paritás a tértükrözési szimmetriával kapcsolatos. Ha \hat{P} a tértükrözés operátora, és a $\Psi(\vec{r})$ hullámfüggvény az operátor sajátfüggvénye α sajátértékkel,

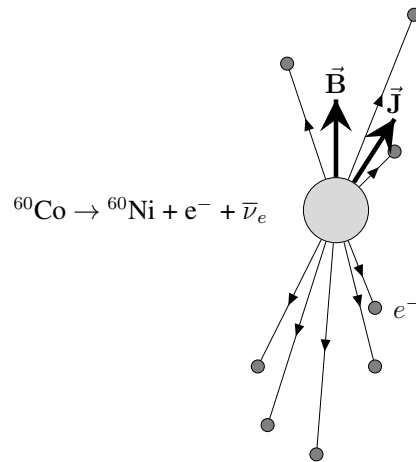
$$\hat{P}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \alpha\Psi(\vec{r}). \quad (1.37)$$

Mivel a kétszeri tükrözés helyreállítja az eredeti állapotot,

$$\Psi(\vec{r}) = \hat{P}^2\Psi(\vec{r}) = \alpha^2\Psi(\vec{r}), \quad (1.38)$$

ezért $\alpha = \pm 1$ a lehetséges sajátértékek. A tapasztalat szerint az erős és elektromágneses kölcsönhatás megőrzi a paritást (jó kvantumszám), míg a gyenge kölcsönhatás sérti azt: meg lehet különböztetni a jobb és bal oldalt! Ha a paritás jó kvantumszám, akkor $\Psi(\vec{r}) = \pm\Psi(-\vec{r})$, és $|\Psi(\vec{r})|^2 = |\Psi(-\vec{r})|^2$, azaz a kilépő részecskék intenzitása a két ellentétes irányban egyenlő. 1956-ban Lee és Yang javasoltak egy kísérletet, amit Wu végzett el: polarizált (mágneses térben a mágneses térrel párhuzamosan beállított spinű) ^{60}Co β bomlását vizsgálták, $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}$ és mérték a kimenő elektronok számát két ellentétes irányban (pl. a spinnel megegyező és azzal ellentétes irányban). A tértükrözés hatására $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, viszont a spin ($\vec{r} \times \vec{p}$) nem vált előjelet, így a tértükrözött világban a kimenő momentum és a spin relatív iránya, azaz a spin momentum irányú komponense (helicitás ⁹) megváltozik. A kísérlet során azt találták, hogy a két irányba kilépő elektronok száma nem egyforma, ezért a paritás sérül.

⁹A helicitás jó kvantumszám tömegtelen részecskék esetén, ott a spin helyett használjuk. Tömeges részecske esetén beülhetünk olyan vonatkoztatási rendszerbe, mely a részecskénél gyorsabban mozog, ezáltal megváltozik a momentum, és így a helicitás előjele is, azaz tömeges részecskére a helicitás vonatkoztatási rendszer függő, így nem jó kvantumszám.



1.4. ábra. A Lee, Young, Wu kísérlet vázlatja: az erősen lehűtött (0.01K), a \vec{B} mágneses térrel beállított \vec{J} magspin irányában kevesebb elektron észlelünk, mint az ellentétes irányban.

Időparitás: Az időparitás az időtükrözési szimmetriával kapcsolatos, és a \hat{T} operátor \hat{P} tértükrözési operátorhoz hasonlít,

$$\hat{T}\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, -t) = \alpha\Psi(\vec{r}, t), \quad (1.39)$$

ahol $\alpha = \pm 1$. Közvetlen kimutatása nehézkes, ezért leginkább a paritás, és töltéstükrözés (\hat{C}) segítségével valósítjuk meg. Kauzalitási okokból az egyesített CPT szimmetriának (tér-, idő- és töltéstükrözés) meg kell maradnia minden kölcsönhatásban, így, ha a P és C közül csak az egyik sérül, vagy a CP sérül, akkor a T -nek sérülnie kell. Az ismert kölcsönhatások közül csak a gyenge kölcsönhatásban sérül ez a szimmetria.

A töltéstükrözés (minden töltést, azaz nemcsak az elektromos, hanem a következőkben ismertetett töltéseket is megfordítva) a „rendes” világot átviszi az antivilágba. Ha ez a szimmetria sérül (és a tapasztalat szerint sérül), akkor a „rendes” és antivilág nem egyforma, és a „rendes” anyag megfigyelt túlsúlya nem a véletlen műve.

Ritkaság: Számos részecske csak gyenge kölcsönhatással tud bomlani, pedig látványosan semmi oka nincs annak, hogy ne tudjon erős kölcsönhatással bomlani. Az ilyen részecskék felfedezésük idejében „ritkák” voltak, innen ered a

kvantumszám neve. A

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad (1.40)$$

folyamat végbemegy erős kölcsönhatással, de a

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0 \quad (1.41)$$

csak gyengén zajlik le. Ha a ritkaság megmarad az erős kölcsönhatásban, és $S_\Lambda = -1$, $S_K = 1$, a többi részecskére pedig $S = 0$, akkor az első folyamatban megmarad a ritkaság, a másodikban azonban nem, azaz a gyenge kölcsönhatás sérti a ritkaságmegmaradást.

Izospin: Az erős kölcsönhatásban részt vevő részecskék (hadronok: ezek a kölcsönhatást közvetítő egész spinű mezonokból, és az feles spinű barionokból állnak) érdekes csoportokat alkotnak, melyeknek tagjai igen hasonlóan egymásra, és az erős kölcsönhatás szempontjából „egyformán” viselkednek. Ilyen csoportok a (p, n) , (π^+, π^0, π^-) , $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$. Ezek a csoportok a spin kvantumszámhoz hasonlóan jellemezhetők az I izospin kvantumszámmal, és annak 3. irányú komponensével (I_3). Egy csoportban $2I + 1$ elem található, és az I_3 lehetséges értékei 1-el változnak. A (p, n) ennek alapján egy $I = 1/2$ csoportot alkotnak, $I_3 = \pm 1/2$ értékkel. Mivel az atommagokban több a neutron, ezért a magfizikában az neutron izospin 3. komponens $+1/2$, míg a protoné $-1/2$, így a nagy magok izospin 3. komponense pozitív.¹⁰

Az elektromágneses kölcsönhatás nyilvánvalóan sérti ezt a szimmetriát, mivel megkülönbözteti a proton és a neutron a töltésük alapján.

Barion töltés: A proton nem bomlik el a tapasztalat szerint semmilyen kölcsönhatással¹¹, amiért valamilyen megmaradási tétel felelős. A hozzá tartozó megmaradó mennyiséget barion töltésnek (B) nevezték el, az erős kölcsönhatásban részt vevő anyagi fermionok rendelkeznek pozitív bariontöltéssel, antirészecskéig negatív töltéssel.

Hipertöltés: A ritkaság és bariontöltése, illetve elektromos töltés és izospin harmadik komponens segítségével felírhatunk egy másik mennyiséget, a hipertöltést,

$$Y = S + B = 2(Q - I_3). \quad (1.42)$$

¹⁰Részecskefizikában fordított a helyzet, ott a proton izospin harmadik komponens van pozitív-nak választva.

¹¹bizonyos elméletek megengedik a proton bomlását, de nagyon nagy $T_{1/2} \sim 10^{30}$ év idővel.

Mennyiség	Erős	Elektromágneses	Gyenge
Energia	+	+	+
Impulzus	+	+	+
Impulzusmomentum	+	+	+
Paritás	+	+	-
Időparitás	+	+	-
Barion töltés	+	+	+
Lepton töltés	+	+	+
Elektromos töltés	+	+	+
Ritkaság	+	+	-
Hipertöltés	+	+	-
Izospin	+	-	-

1.2. táblázat. A különböző mennyiség megmaradási tulajdonságai az erős, elektromágneses és gyenge kölcsönhatásokban.

Általában ezt fogjuk használni a ritkaság helyett.

Lepton töltés: A részecskék egy csoportja (a „könnyű” fermionok: elektron, müon, tau) minden kölcsönhatásban párosan vesznek részt, ami arra utal, hogy ezek rendelkeznek egy megmaradó kvantumszámmal, ez a leptonszám (L). Az antirészecskék negatív leptonszámmal rendelkeznek.

Ennek alapján a különböző mennyiségek megmaradását a kölcsönhatásokban az 1.2 táblázatban foglaltuk össze, míg Néhány részecske jellemzőit az 1.3. táblázat tartalmazza.

1.2.4. Az elemi részek rendszerezése

A magfizikai kísérletek beindulásával, és a kozmikus sugárzás detektálásának javulásával hirtelen nagyon sok lett az „elemi” részecske. Az izomultiplettek túl is találtak azonban sok közöset a különböző részecskék között. Ha összegyűjtjük az azonos típusú (mezon, illetve barion) részecskéket, melyek azonos paritással és spinnel rendelkeznek, érdekes összefüggéseket találunk a tulajdonságaik között. Az egyik leghatékonyabb vizsgálat az ilyen részecskék ábrázolása volt az izospin 3. komponens – hipertöltése síkban (1.5 ábra.)

	p	n	π^+	π^0	π^-	K^+	K^-	e^-	ν	γ
J	1/2	1/2	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1
P	+	+	-	-	-	-	-	+	*	-
B	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
Q	1	0	1	0	-1	1	-1	-1	0	0
S	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
Y	1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0
I	1/2	1/2	1	1	1	1/2	1/2	0	0	0
I_3	1/2	-1/2	1	0	-1	1/2	-1/2	0	0	0
$T_{1/2}$	-	-	$3 \cdot 10^{-8}$	10^{-16}	$3 \cdot 10^{-8}$	10^{-8}	10^{-8}	-	-	-

1.3. táblázat. Néhány részecske szimmetriatulajdonsága. A ν sérti a paritást.

Ez a fajta csoportosítás a csoportelmélet tárgykörébe tartozik, és megmutatható, hogy például a komponensek tömegei között fenn kell állnia az

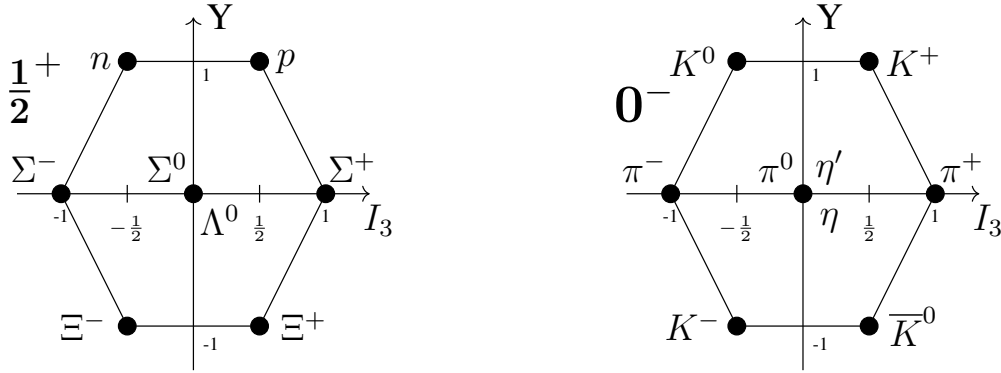
$$\frac{1}{2}M_N + \frac{1}{2}M_{\Xi} = \frac{3}{4}M_{\Lambda} + \frac{1}{4}M_{\Sigma}, \quad (1.43)$$

összefüggésnek, amibe beírva a kísérleti ($M_N=940$ MeV, $M_{\Xi}=1320$ MeV, $M_{\Lambda}=1115$ MeV, $M_{\Sigma}=1192$ MeV) értékeket, az fél százalékon belül teljesül! Ez azt jelenti, hogy a barion oktett nyolc részecskéje egy állapot különböző kvantumszámú megvalósulásainak tekinthető. Hasonló oktettek, vagy magasabb csoportok (10, 27, stb elemű) képezhetők a többi barionból (reznanciák, más spinnel, illetve paritással). Ezek az ábrázolások a SU(3) szimmetricsoporthoz tartozó ábrázolások.

A mezonokra a legkisebb tömegű részecskék alkotta nonett tagjainak tömege ($M_{\pi}=138$ MeV, $M_K=496$ MeV, $M_{\eta}=547$ MeV, $M_{\eta'}=958$ MeV). Megfigyelhető, hogy a tömegek viszonylag alacsonyak, különösen a pion tömege. Ez az erős kölcsönhatás fundamentális elméletének egy különleges szimmetriájához köthető, amiről később lesz szó.

A kvarkok

A részecskék csoportelméleti osztályozásakor hiányzott az SU(3) csoport legyszerűbb ábrázolása, a triplett, ezért Gell-Mann és Zweig 1964-ben, pusztán a szimmetriákra építő, csoportelméleti tulajdonságok alapján feltételezték, hogy létezik három, még fel nem fedezett részecske is (1.6 ábra), pozitív paritással, és 1/2 spinnel, valamint ezeknek természetesen megvannak az antirészecskéik.



1.5. ábra. A legalacsonyabb energiájú barion oktett (bal) és mezon nonett (jobb) ábrázolása.

Ezeket a részeket Gell-Mann kvarknak ¹² nevezte, és megmutatta, hogy belőlük felépíthetők a mezonok (mint kvark-antikvark állapotok) és a barionok (mint 3 kvark állapotok). Ehhez a három kvarkra (u , d , és s) ¹³ a következő tulajdonságokat kellett rendelni:

	B	Y	I	I_3	Q	S	J
u	1/3	1/3	1/2	1/2	2/3	0	1/2
d	1/3	1/3	1/2	-1/2	-1/3	0	1/2
s	1/3	-2/3	0	0	-1/3	-1	1/2

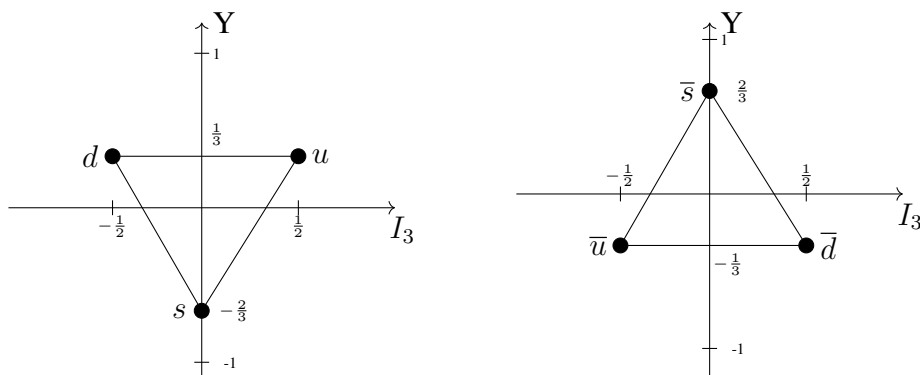
1.4. táblázat. A kvarkok tulajdonságai

Ennek alapján néhány barion szerkezete a következő:

- $J = 1/2$ csoport: $p(uud)$, $n(udd)$, $\Lambda(uds)$, $\Sigma^+(uus)$, $\Sigma^0(uds)$, $\Sigma^-(dds)$, $\Xi^0(uss)$, $\Xi^-(dss)$
- $J = 3/2$ csoport: $\Delta^{++}(uuu)$, $\Delta^+(uud)$, $\Delta^0(udd)$, $\Delta^-(ddd)$, $\Omega^-(sss)$.

¹²A kvark név nem jelent semmit, a legenda szerint James Joyce egyik művében szerepel, homályos jelentéssel: „Három kvarkot Mark Mesternek!”.

¹³Az angol *up* (fel), *down* (le) és *strange* (különös) szavakból.



1.6. ábra. Az SU(3) csoport 3-as és $\bar{3}$ -as alapábrázolása.

Ez utóbbi csoport különösen érdekes, mivel egyes állapotai három egyforma kvarkot tartalmaznak, amit a Pauli elv kizár. Ez vezetett a kvarkok egy újabb tulajdonságának, az ún. szín kvantumszámnak¹⁴ a felfedezéséhez, amit később kísérletileg is ellenőriztek.

A mezonok szerkezete a következő:

- $J = 0^-$ csoport: $\pi^+(u\bar{d}), \pi^0(1/\sqrt{3}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})), \pi^-(d\bar{u}), K^+(u\bar{s}), K^0(d\bar{s}), \bar{K}^0(s\bar{d}), K^+(s\bar{u})$.
- $J = 1^-$ csoport: $\rho^+(u\bar{d}), \rho^0(1/\sqrt{3}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})), \rho^+(d\bar{u}), \eta^0(1/\sqrt{3}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}))$.

A kvarkok (elemibb összetevők) létezésére már utal pl. a nukleonok mágneses momentum az (1.4), melyre a giromágneses faktor nem egész, ($g_p = 2.793$, $g_n = -1.913$). Közvetettebb kísérleti bizonyíték a „napjaink Rutherford kísérlete” volt, melynek során nagyenergiás elektronokkal bombázták a protont, és a szórás kép arra utalt, hogy a protonon belül 3 szórócentrum található. A vizsgálatok azonban azt is megmutatták, hogy a 3 kvark a proton impulzusának csak kb. a felével rendelkezik, a maradék impulzus valószínűleg a kvarkokat összetartó részecskének, a gluonoknak tulajdonítható.

Mivel kvarkot a természetben nem találtak szabadon, csak kötött állapotokban, ezért a kvark-kvark potenciálnak nagy távolságon a távolsággal nőnie kell, ami

¹⁴Ennek a kvantumszámnak semmi köze a színhez, pusztán egy olyan kvantumszám, melynek három értéke lehet, melyeket pirosnak, kéknek és zöldnek neveznek.

bezárást eredményez. Elméleti számolások szerint a kvark potenciál

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{kis távolságon} \\ r^2 & \text{nagy távolságon} \end{cases} \quad (1.44)$$

A kvarkok színe

Mint az előző alfejezetben láttuk, vannak olyan részecskék ($\Delta^{++}, \Delta^{--}, \Omega^{-}$), melyek kvarkfelépítését a Pauli elv tiltaná. Ha ragaszkodunk a kvark képhez, és a Pauli elvhez, akkor fel kell tennünk, hogy a kvarkoknak van még egy kvantumszámuk, mely lehetővé teszi a három kvark különböző kvantumállapotban legyen jelen ezekben a részecskékben. Ezt a kvantumszámot színnek nevezzük, és három lehetséges értéke van. Ennek kísérleti igazolása az elektron-positron szórás vizsgálatával történt. A szórás eredményeként létrejöhetnek újabb részecskepárok, pl. ($\mu^{+}\mu^{-}$), illetve a kvarkmodell alapján kvark-antikvark kötött állapotként leírható mezonok ($u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$). Az átalakulás úgy zajlik le, hogy az elektron-positron pár először fotonná alakul (annihiláció), majd ebből a fotonból alakul ki egy új pár. Ezért a reakció elektromágneses kölcsönhatással zajlik, melynek erőssége a benne részt vevő töltés négyzetével arányos. A muonpár keltésének valószínűségét egységnyi választva (egységnyi elektron töltés), a különböző kvarkpárok keltési valószínűsége:

$$u\bar{u} : (2/3)^2, \quad d\bar{d}, s\bar{s} : (1/3)^2 \quad (1.45)$$

azaz egy tetszőleges kvarkpár keltésének esélye a fenti számok összege, $2/3$. A kvarkmodell jóslata alapján nagy energián (amikor lényegtelen a keltett részecskék tömege) $2/3$ annyi mezon keltődik elektron-positron ütközésben, mint muonpár. Ezzel szemben a kísérlet szerint kétszer annyi mezon keltődött, amit megmagyarázna a szín kvantumszám bevezetése: 3 lehetséges szín (kvantumállapot) esetén háromszor annyi folyamat vezet kvark-antikvark pár keltéséhez.

Ezek az alapfeltevések vezettek később a kvarkokat és a gluonokat leíró elmélet, a kvantumszíndinamika (QCD) megalkotásához. Ahogy a fotonok a töltésekhez kapcsolódnak, a QCD-ben a gluonok a kvarkok szín(töltés)éhez kapcsolódnak. A azonban QCD nem lehet a kvantum elektrodinamika ennyire egyszerű másolata, mivel a kölcsönhatás a távolság növekedésével az előbbiben nő, míg az utóbbiban csökken. Ennek leírásához fel kellett tenni, hogy több gluon van (8, az SU(3) színcsoportnak megfelelően), melyek egymással is kölcsönhathatnak. Ez az elmélet már képes igen jól leírni a megfigyelt bezárást, miszerint a kvarkok mindig olyan kötött állapotban fordulnak csak elő, melynek a teljes színtöltése

nulla, azaz vagy kvark-antikvark párban, vagy olyan három kvark kötött állapotban, melyben a három összetevő különböző színű.

Magasabb csoportelméleti ábrázolások

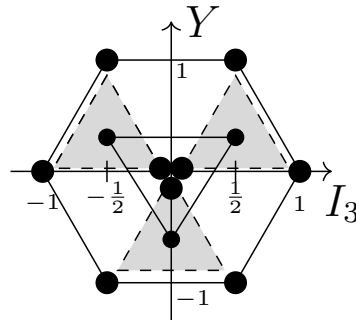
A kvark (3) és antikvark ($\bar{3}$) fundamentális multiplettekől (ld. 1.6 ábra) megkonstruálhatók a magasabb multiplettek, a többkvark állapotok.

- **Mezonok**

A mezonok egy kvark és egy antikvark párosából állnak, teljes bariontöltésük így nulla, és a kvark és antikvark multiplettek szorzataként állnak elő:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1, \quad (1.46)$$

azaz egy oktett és egy szinglett állapotra bomlanak. Ezt a következő ábrával lehet szemléltetni: rajzoljuk fel a kvark multiplettet (vékony háromszög az ábra közepén, a csúcaiban a három állapotot jelképező pont), és minden csúcsa (állapota) körül rajzoljunk fel egy antikvark multiplettet (szaggatott besatírozott háromszög). A antikvark multiplettek csúcsai rajzolják ki a szorzatábrázolás állapotait (vastag pontok). Ebből három állapot ugyanazt az Y, I_3 értéket veszi fel.



Az oktett ábrázolásban az állapotok egy hatszög csúcaiban helyezkednek el, valamint a hatszög középpontjában található két állapot. A szinglet a $(0, 0)$ állapotnak felel meg.

Ha feltesszük, hogy a legmélyebb energiájú kvark-antikvark párok az $l = 0$ impulzusmomentumú állapotban vannak, akkor, mivel a (anti)kvarkok spinje $1/2$, közös állapotuk vagy a $J = 0$, vagy a $J = 1$ teljes impulzusmomentummal jellemezhető. Továbbá, mivel a kvarkok és antikvarkok paritás ellentétes, a közös

állapot paritása mindig negatív. Valóban, mind a 0^- , mind az 1^- állapotok megfigyelhetők a természetben. A 0^- osztályba tartoznak a pionok, kaonok és az η részecske, míg a szingletet az η' képviseli.

- **Barionok**

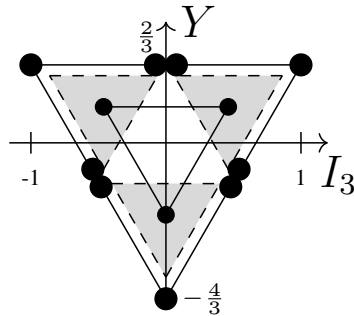
A barionok háromkvark állapotok, teljes bariontöltésük egy, és három kvark multipllett szorzataként állnak elő:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (3 \otimes 3). \quad (1.47)$$

Először vizsgáljuk meg a $3 \otimes 3$ dikvark állapotot, majd ezt szorozzuk be egy kvark tripllettel.

- **Dikvarkok**

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$$



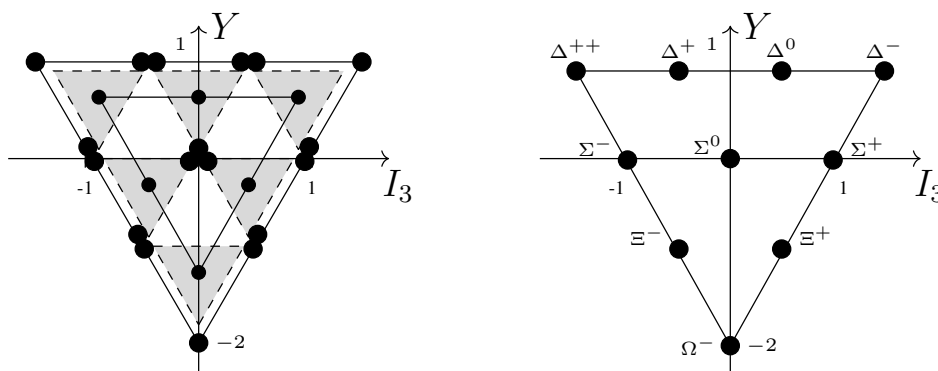
A dupla pontok kirajzolnak egy felfelé néző háromszöget, mely az antitriplletnek felel meg, a maradék állapotok pedig egy 6 állapotból álló ábrázolásnak felelnek meg (lefelé néző háromszög).

A dikvarkok normális viszonyok között nem fordulnak elő a természetben, de egyes elméletek szerint a nagyon sűrű és hideg neutroncsillagok belsejében kialakuló „kvarklevesben” megjelenhetnek.

- **Barionok**

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = (3 \otimes 6) \oplus (3 \otimes \bar{3}) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8:$$



A dupla (tripla) pontok ismét kirajzolnak egy (hatszög) ábrázolást, az oktettet, a maradék pontok pedig egy dekupletnek felelnek meg (lefelé néző háromszög: jobb oldali ábra).

• Pentakvarkok

$$3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes \bar{3} = \dots + 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (1.48)$$

Barion kvantumszámokkal rendelkeznek, és a zöme nem különböztethető meg jól egy egyszerű bariontól, melyben egy még – virtuálisan – egy kvark-antikvark pár található. A kísérletileg érdekes esetek, amikor az antikvarknak nincsen azonos ízű kvark párja, és olyan Y , I_3 kvantumszámokat találunk, melyek nem fordulnak elő a 3 kvarkból álló barionoknál. A $\bar{10}$ -es (antidekuplett) ábrázolásban három ilyen állapot fordul elő, a $\bar{10}$ -es háromszög három csúcsában:

- θ^+ : $(uudd\bar{s})$, $m=1539$ MeV, $Y = 1$, $I_3 = 0$
- Ξ^{--} : $(ddss\bar{u})$, $m=1862$ MeV, $Y = -1$, $I_3 = -3/2$
- Ξ^{++} : $(uuss\bar{d})$, $m=1862$ MeV, $Y = -1$, $I_3 = 3/2$

Részecskék és kölcsönhatások

Az erős és az elektroyenge kölcsönhatás modern elméletével a kölcsönhatásokat úgy képzeljük el, hogy azokat valamilyen részecske(k) közvetíti ¹⁵. A közvetítő részecskék bozonok (egész spinűek), míg az „anyagi” részecskék fermionok (félegész spinűek).

¹⁵Ez szemben áll Newton, a távolbható erőket feltételező elképzelésével.

A modern térelméletek „mintája” a kvantum elektrodinamika: a töltött fermionok (elektron, proton, vagy kvark) között a foton közvetíti a kölcsönhatást. Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a különböző kölcsönhatásokat, és a bennük részt vevő részecskéket.

Kölcsönhatás	anyagi részecske	közvetítő részecske
elektromágneses	e, q	γ
erős	q	g
elektrogyenge	q, e, ν	γ, Z^0, W^\pm

1.5. táblázat. A különböző kölcsönhatásokban részt vevő részecskék (q : kvarkok, g : gluonok).

Az évek során találtak még három kvarkok (és a hozzájuk kapcsolódó megmaradó mennyiséget, és kvantumszámot), a bájos (charm: c), bottom (b) és top (t) kvarkot. A nevük (mely egyben egy, az erős kölcsönhatásban megmaradó kvantumszám is) ismét csak a fantázia szülötte.

Ennek alapján megalkották a nagy egyesített elméletet, mely egységes keretben tárgyalja az erős és elektrogyenge kölcsönhatást. Az elmélet azt sugallja, hogy nagyon nagy energián (Planck skála, $\sim 10^{19}$ GeV) a három kölcsönhatás egységesen viselkedik, az energia csökkenésével azonban az elektrogyenge erőssége csökken, míg az erős kölcsönhatásé nő. A gyenge kölcsönhatás közvetítő részecskéinek (Z^0, W^\pm) tömege körüli energiákon (80-100 GeV) az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás válik ketté, a gyenge az energia csökkenésével erősen veszít erejéből.

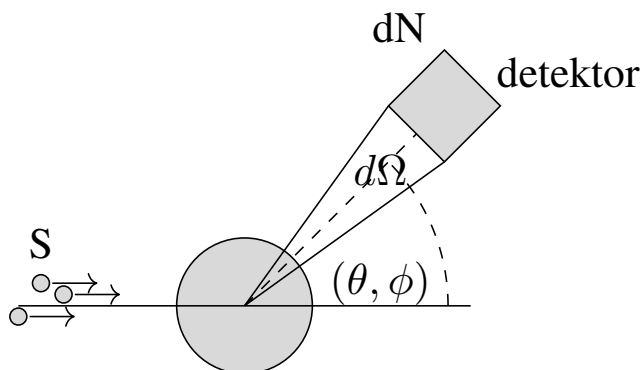
A nagy egyesített elméletben az eddig megismert 3 kvark helyett 6 darab szerepel, az u, d, s, c (charm, bájos), t (top) és b (bottom) kvarkok. Míg az első három könnyű kvark ($m_u \approx m_d \approx 5-10$ MeV, $m_s \approx 150$ MeV), addig a maradék három kvark nehéz (1 GeV-nél nehezebb). Ez az oka annak, hogy a három könnyű, majdnem egyforma tömegű kvark alkotta SU(3) csoporttal le lehetett írni a legkönnyebb hadronokat (barionokat és mezonokat). Ha mind a hat kvark egyforma tömegű lenne, a részecskék megfelelő leírása az SU(6) csoporttal lenne lehetséges.

2. fejezet

Magerők: kéttest rendszerek

Ebben a fejezetben a magerők tulajdonságait térképezzük fel a legegyszerűbb rendszer, a kéttest rendszerek vizsgálata alapján. Az ilyen kvantummechanikai rendszereknek van kötött, és szórási állapotuk. Először a szórási állapotokat tanulmányozzuk.

2.1. Szórási állapotok



2.1. ábra. A szórási kísérlet sematikus ábrája: a végtelen távolból bejövő S fluxusu részecskékből dN szóródik a (θ, φ) körüli $d\Omega$ térszögbe, ahol a detektor észleli őket.

A szórás kísérleti végrehajtása során a céltárgyra (szórócentrum) egy homogén

részecskefolyamot bocsájtok. Ez a z tengely $-\infty$ irányából érkezik, és felületegységenként S részecske áthaladását eredményezi az origó körül, azaz a részecskeáram fluxusa S . A szórócentrummal való kölcsönhatás következtében a bejövő részecskék eltérülnek az eredeti, z tengellyel párhuzamos haladási irányuktól, és különböző, (θ, ϕ) szögekkel jellemezhető $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ térszögbe szórodnak. A kísérletben megmérjük, hogy hány részecske (dN) szóródott adott irány körüli kis térszögbe.

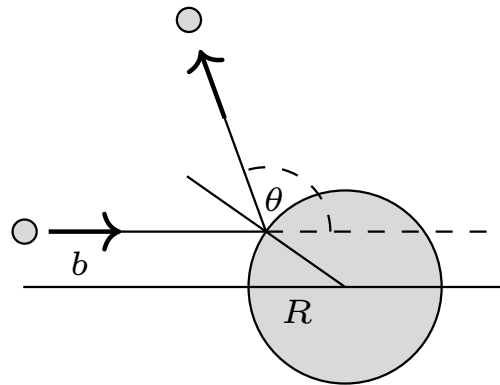
Az elméleti tárgyalás során feltételezzük, hogy a szórócentrumtól elég távol a potenciál hatása elhanyagolható, és a részecskék szabadnak tekinthetők.

2.1.1. Hatáskeresztmetszet

A (differenciális) hatáskeresztmetszet megadja, hogy a bejövő részecskék mekkora része szóródott ki adott irányba, azaz,

$$dN = \sigma(\theta, \phi) S d\Omega. \quad (2.1)$$

Mivel a fluxus mértékegysége db/felületegység, ezért a σ hatáskeresztmetszet dimenziója a felülettel egyezik meg.



2.2. ábra. Merev gömbön való szórás.

A hatáskeresztmetszet szemléletes jelentése egy R sugarú merev gömbön történő szórással érhető meg. A b ütközési paraméternél bejövő részecske θ szögben szóródik, ahol $b = R \cos(\theta/2)$, és a ϕ szög nem változik. Mivel a b körüli ütközési paraméter tartományban jövő részecskék mind a θ körüli szögtartományba

szóródnak, ezért az ebbe a szögbe szórt részek száma

$$dN = S b |db| d\phi = \sigma(\theta, \phi) S \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.2)$$

Mivel az ütközési paraméter és kimenő szög összefüggése alapján $db = -R/2 \sin \theta/2$, a hatáskeresztmetszetre a

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{R^2}{4} \quad (2.3)$$

egyenletes eloszlás adódik. A teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \int d\Omega \sigma(\theta, \phi) \quad (2.4)$$

pedig merev gömb esetén a gömb πR^2 keresztmetszetét adja meg. Az összes, tetszőleges irányba kiszórt részecskék számát a teljes hatáskeresztmetszet adja meg,

$$N = \sigma S \quad (2.5)$$

Magfizikában a hatáskeresztmetszetet *mbarn* (mb) egységekben mérjük, $10 \text{ mb} = 1 \text{ fm}^2$. A nukleon szórási hatáskeresztmetszet tipikus értéke elég nagy energiatarományban 30-40 mb.¹

A hatáskeresztmetszet kvantummechanikai leírása

A kvantummechanikában a z tengely mentén $-\infty$ -ből érkező bejövő részecske hullámfüggvénye egy síkhullám, $\Phi_{be} \sim e^{ikz}$. A teljes időfüggő hullámfüggvény

$$\Psi_{be}(\vec{r}, t) = \Phi_{be}(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \sim e^{\frac{i}{\hbar} (\hbar k z - Et)}, \quad (2.6)$$

azaz az azonos fázisú pontokra $\hbar k z_1 - E t_1 = \hbar k z_2 - E t_2$, vagy másképp $\hbar k (z_1 - z_2) = E (t_1 - t_2)$. Ha $t_1 > t_2$, akkor $z_1 > z_2$, azaz későbbi időpontban a részecske a pozitív z tengely irányába mozdult el.

A kijövő hullámfüggvény kifutó, a szög függvényében változó amplitudójú gömbhullám alakjában keressük, $\Phi_{ki} \sim f(\theta, \phi) \frac{1}{r} e^{ikr}$. Az előző gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy ez egy kifelé haladó gömbhullámot ír le.

¹Ebből, merev gömböt feltételezve a proton sugarára 1-1.1 fm jön ki.

Az esetek zömében a potenciál hengerszimmetrikus, és az eredmény nem függ a ϕ szögtől,

$$\Phi(\vec{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.7)$$

A hullámfüggvény minkét tagja megoldása a $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi = E\Phi$ szabad Schrödinger egyenletnek (a potenciáltól távol).

A következő lépésben meghatározzuk a a bejövő illetve kimenő hullámfüggvényhez tartozó

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\vec{\nabla}\Phi^* \Phi - \Phi^* \vec{\nabla}\Phi) \quad (2.8)$$

áramsűrűséget. A bejövő $\Phi_{be} = e^{ikz}$ hullámfüggvényre

$$S = j_{be} = \frac{\hbar k}{m}, \quad (2.9)$$

míg a kijövő $\Phi_{be} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ hullámfüggvényre az áram sugárirányú és így a radiális deriválást elvégezve

$$j_{ki} = \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\theta)|^2. \quad (2.10)$$

A $d\Omega$ irányba szórt részecskék száma az áramsűrűség és a $dF = r^2 d\Omega$ felületelem szorzata,

$$dN = j_{ki} dF = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2 r^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 S d\Omega. \quad (2.11)$$

Ebből a differenciális hatáskeresztmetszet azonnal leolvasható,

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (2.12)$$

és az f szórási amplitudó abszolútérték négyzetének adódik.

2.1.2. A Schrödinger egyenlet gömbi polárkoordinátákban

A szabad

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi(\vec{r}) = E\Phi(\vec{r}) \quad (2.13)$$

Schrödinger egyenlet gömbi polárkoordinátákban a Laplace operátor

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \quad (2.14)$$

alakjával írható fel. A jobb oldal első tagja szükség esetén átírható

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) \quad (2.15)$$

formára is.

Gömbszimmetrikus esetben a hullámfüggvényt célszerű a

$$\Phi(\vec{r}) = R_{kl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.16)$$

szeparált alakban keresni, ahol $Y_l^m(\theta, \phi)$ -k a gömbfüggvények,

$$\Delta Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.17)$$

tulajdonsággal, és l a mellék, m a mágneses kvantumszám. Pozitív energiájú (szórás)állapotokra bevezetve a $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ jelölést, a szórócentrumtól távol, szabadnak tekinthető esetre a

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \quad (2.18)$$

Schrödinger egyenlet a hullámfüggvény radiális részére az

$$\frac{1}{r} (r R_{kl})'' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{kl} = 0 \quad (2.19)$$

alakot ölti, melynek általános megoldásai a

$$\Phi(\vec{r}) \sim j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.20)$$

gömbi Bessel függvényekkel jellemezhető sajátfüggvények. Nagy távolságra ($r \rightarrow \infty$) ezek a függvények a

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{r} \sin \left(kr - l\frac{\pi}{2} \right) \quad (2.21)$$

aszimptotikus kifejezéshez tartanak.

Amennyiben az origó körül potenciál található, annak hatását fenomenológikusan úgy vehetjük figyelembe, hogy a távoli, aszimptotikus hullámfüggvény fázisát változtatja meg,

$$\Phi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.22)$$

Vonzó potenciál esetén a kifutó hullám késik, taszító potenciál esetén siet a szabad (2.21) esethez képest, azaz $\delta_l > 0$ vonzó, míg $\delta_l < 0$ taszító potenciál esetén.

Vegyük észre, hogy a (2.18) egyenletnek egyformán megoldása a

$$\Phi_g(\vec{r}) \sim \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (2.23)$$

gömbhullám és a

$$\Phi_s(\vec{r}) \sim e^{\pm ikz} \quad (2.24)$$

síkhullám is. A két megoldáshalmaz két különböző bázisfüggvény sokaságnak tekinthető, így a síkhullámok például kifejtethetők a gömbhullám bázison,

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}]. \quad (2.25)$$

2.1.3. Parciális hullámok módszere

Centrális potenciálban a szórásproblémának hengersizimetriája van (a bejövő részecske által meghatározott tengely mentén), sem a bejövő síkhullám, sem a szórt állapot nem függ a ϕ szögtől, azaz a (2.22) hullámfüggvény ($m = 0$)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r} \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{2ir} P_l(\cos\theta) [e^{ikr} e^{i\delta_l} (-i)^l - e^{-ikr} e^{-i\delta_l} i^l] \end{aligned} \quad (2.26)$$

alakját a szórás általános (2.7)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}] + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.27)$$

képletével kell összehasonlítani. Innen leolvasható a szórás amplitúdó,

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2.28)$$

($A_l = \frac{1}{2k} i^l (2l+1) e^{i\delta_l}$), és a P_l Legendre polinomok ortonormalitását kihasználva a teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (2.29)$$

Vegyük észre, hogy a vezető energiafüggést az $1/k^2 \sim 1/E$ faktor hordozza, azaz a hatáskeresztmetszet általános tulajdonsága, hogy az energiával fordítottan arányos. Ezt természetesen módosít(hat)ja az összegzésben szereplő fáziseltolások energiafüggése, mely folyamatfüggő.

Kis energiájú szórások

A hatáskeresztmetszet (2.29) képlete a végtelen sok l kvantumszámú parciális hullám δ_l fázistolásának ismeretét tételezi fel, és így önmagában ezért nem túl hasznos. Azonban a gyakorlati alkalmazásokban szerencsére a végtelen összegzés helyett csak bizonyos maximális impulzusmomentumig kell elmennünk. Az l kvantumszámnak $\hbar^2 l(l+1)$ impulzusmomentum négyzet felel meg, ezért a szórás legfeljebb olyan l állapotok fordulhatnak elő, melyek impulzusmomentuma kisebb az E energiájú bejövő részecske b ütközési paraméternél kiszámolható klasszikus értékénél,

$$\hbar^2 l(l+1) \leq p^2 b^2 = 2m E b^2. \quad (2.30)$$

Ez meghatározza, hogy adott energián a potenciál véges hatótávolságán belül mekkora a maximális figyelembe veendő l kvantumszám. Elég kis energián csak a gömbszimmetrikus $l=0$ parciális hullámnak van helye, és a teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0. \quad (2.31)$$

Az elméleti számolásokban feltételezünk egy nukleon-nukleon potenciált, és arra kiszámoljuk a δ_l fázistolásokat minden l módusra, majd ebből meghatározhatóak a hatáskeresztmetszetek különböző energiákon. Természetesen maguk a

$\delta_l = \delta_l(E)$ fázistolások is energiafüggők. Egy másik gond a rugalmatlan szórások megjelenése, a két pion keltéséhez szükséges energia (300 MeV) fölött már nem csak az eddig tárgyalt rugalmas szórások jelennek meg, hanem új részecskék is képződhetnek, és a fenti tárgyalásmód rohamosan elromlik. Ugyancsak módosítást okoz egy esetleges spin-pálya csatoló tag a potenciálban, amikor a teljes impulzusmomentum (j) lesz a jó kvantumszám. Az egyszerűség kedvéért ezt az esetet itt nem tárgyaljuk.

A kísérletekben a (differenciális) hatáskeresztmetszet kimérésével számolják vissza a fázistolás értékeit, és ezeket az elméleti értékekkel összevetve lehet a különböző elméleti modellek közül a kísérletekkel jobban egyezőket kiválasztani. A hatáskeresztmetszet szögeloszlása jellemző az l módusra, így annak vizsgálatából az is megállapítható, hogy a szórás milyen impulzusmomentum(ok)nak történt.

2.1.4. Optikai tétel

A szórás (2.7) kifejezés általános esetben átírhatjuk a

$$\Phi(\vec{r}) \sim e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{1}{r}f(\vec{n}, \vec{n}') e^{ikr} \quad (2.32)$$

alakra, mely egy \vec{n} irányból bejövő síkhullámot, és egy kifutó gömbhullám \vec{n}' irányba kimenő amplitudóját írja le. A (2.7) képletben \vec{n} a z irányba mutató egységvektor, mellyel a \vec{n}' egységvektor θ szöget zár be.

A bejövő részecskéket általánosan több, különböző irányból bejövő síkhullám szuperpozíciójával jellemezhetjük, melyek amplitudóeloszlását a $F(\vec{n})$ függvény jellemzi, ($\int d\Omega F(\vec{n}) = 1$), és a teljes hullámfüggvény ilyenkor

$$\Phi(\vec{r}) = \int d\Omega F(\vec{n})e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{e^{ikr}}{r} \int d\Omega F(\vec{n})f(\vec{n}, \vec{n}'). \quad (2.33)$$

A potenciáltól távol ($r \rightarrow \infty$) az $e^{ikr\vec{n}\vec{n}'}$ egy gyorsan változó fázisfaktort ír le, melynek átlagértéke a két vektor párhuzamos beállásai kivételével nulla,

$$\begin{aligned} \int d\Omega F(\vec{n})e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} &= 2\pi \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{j}{N}\pi}^{\frac{j+1}{N}\pi} \sin\theta d\theta F(\theta)e^{ikr\cos\theta} \quad (2.34) \\ &\approx -2\pi \sum_{j=0}^{N-1} F(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{ikrx} \longrightarrow -\frac{2\pi}{ik} \left[F(\vec{n}) \frac{e^{ikr}}{r} - F(-\vec{n}') \frac{e^{-ikr}}{r} \right], \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a kis θ integrálási tartományon belül a sima $F(\vec{n})$ függvény kiemelhető az integrálás elé, valamint elvégeztük az $x = \cos \theta$ helyettesítést.

Ezzel a (2.33) hullámfüggvény átírható

$$\begin{aligned} \frac{ik}{2\pi} \Phi(\vec{r}) &= F(-\vec{n}') \frac{e^{-ikr}}{r} - F(\vec{n}') \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\Omega F(\vec{n}) f(\vec{n}, \vec{n}') \\ &= \frac{e^{-ikr}}{r} F(-\vec{n}') - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{S} F(\vec{n}'). \end{aligned} \quad (2.35)$$

formában, ahol az \hat{S} szórás mátrix (S -mátrix)

$$\hat{S} = 1 + 2ik\hat{f}, \quad \hat{f}F(\vec{n}') = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega f(\vec{n}, \vec{n}') F(\vec{n}). \quad (2.36)$$

Az első tag írja le a középpontba befutó, a második az onnan kifutó hullámot. Az előző fejezet példájában a szórás mátrix értéke például $S_l = e^{2i\delta_l}$.

Rugalmas szórás esetén a be- és kifutó részecskeáramok megegyeznek tetszőleges $F(\vec{n})$ beeső síkhullám eloszlásra, azaz pl. a be- és kifutó hullámok teljes normája megegyezik,

$$\int d^3r \frac{1}{r^2} |F(-\vec{n})|^2 = \int d^3r \frac{1}{r^2} F^*(\vec{n}) \hat{S}^\dagger \hat{S} F(\vec{n}) \quad (2.37)$$

tetszőleges $F(\vec{n})$ -re. Ennek következménye a szórás mátrix *unitaritása*, azaz

$$\hat{S} \hat{S}^\dagger = \hat{1}, \quad (2.38)$$

illetve a (2.36) definíció alapján

$$\hat{f} - \hat{f}^\dagger = 2ik \hat{f} \hat{f}^\dagger \quad (2.39)$$

azaz

$$f(\vec{n}, \vec{n}') - f^*(\vec{n}', \vec{n}) = \frac{ik}{2\pi} \int d\Omega'' f(\vec{n}, \vec{n}'') f^*(\vec{n}', \vec{n}''), \quad (2.40)$$

ahol kihasználtuk, hogy a (2.39) egyenlőség tetszőleges függvényre hattanva igaz.

Az $\vec{n} = \vec{n}'$ esetben a jobb oldalon álló kifejezés

$$\int d\Omega'' |f(\vec{n}, \vec{n}'')|^2 = \sigma \quad (2.41)$$

a teljes hatáskeresztmetszet, a bal oldali kifejezés pedig az előreszórás (nincsen irányváltás) amplitúdója képzetes részének kétszerese, amit az

$$\text{Im} f(\vec{n}, \vec{n}) = \frac{k}{4\pi} \sigma \quad (2.42)$$

optikai tétel fejez ki.

2.1.5. Born képlet

A szórás hatáskeresztmetszet általános alakban kiszámolható abban az esetben, amikor a szóró potenciál „kicsinek”, azaz perturbációnak tekinthető. A rendszer teljes Hamilton operátora a szabad H_0 operátorból, és a kölcsönhatást leíró H_{kh} operátor összegéből áll. Legyen Φ a szabad rész, Ψ pedig a teljes Hamilton operátor sajátfüggvénye,

$$H\Psi = (H_0 + H_{\text{kh}})\Psi = E\Psi, \quad H_0\Phi = E\Phi, \quad (2.43)$$

ahol a szabad hullámfüggvényt úgy választottuk, hogy energiája megegyezzen a teljes rendszer energiájával. Nagy távolságban a kölcsönhatás elhanyagolható, és $\Psi \rightarrow \Phi$. Átrendezve a bal oldali egyenlőséget,

$$(H_0 - E)\Psi = -H_{\text{kh}}\Psi + (H_0 - E)\Phi. \quad (2.44)$$

Az utolsó tag a perturbálatlan egyenlet, és így járuléka nulla, jelenlétére pusztán a Ψ megfelelő normálása érdekében van szükség a következő átrendezés során,

$$\Psi = \Phi + (E - H_0)^{-1}H_{\text{kh}}\Psi. \quad (2.45)$$

A (2.44) egyenletbe beírt plusz tag garantálja, hogy nagy távolságban (vagy kölcsönhatás nélkül) a Ψ teljes megoldás a Φ perturbálatlan hullámfüggvénybe menjen át.

A következő lépésben a két operátor közé egy teljes (a perturbálatlan operátor sajátfüggvényeiből álló) rendszert beillesztve kapjuk

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + \sum_i (E - H_0)^{-1}|\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|H_{\text{kh}}|\Psi\rangle. \quad (2.46)$$

A Born közelítésben a Φ -k helyébe $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ síkhullámokat írunk ($E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$), és a fenti összegzést a végtelen sok k impulzusú modusra való integrálással helyettesítjük ($\sum_i \rightarrow \frac{1}{h^3} \int d^3p, p = \hbar k$),

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{2m}{(2\pi)^3\hbar^2} \int d^3k' \frac{e^{i\vec{k}'\vec{r}}}{k^2 - k'^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} V(\vec{r}')\Psi(\vec{r}'). \quad (2.47)$$

Végezzük el először az első integrálást,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty k'^2 dk' \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|x}}{k^2 - k'^2} &= \frac{2\pi}{i|\vec{r}-\vec{r}'|} \int_0^\infty k' dk' \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|} - e^{-ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k-k')(k+k')} \\ &= -2\pi^2 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

ahol az utolsó lépésben a Cauchy (reziduum) tételt alkalmaztuk. Nagy távolságon ($r \rightarrow \infty$) $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow r - \vec{r}'\vec{n}$, ahol \vec{n} az \vec{r} irányba mutató helyzetvektor. Ezt helyettesítsük be a (2.47) kifejezésbe, és válasszuk a befutó hullámot a z tengely irányába,

$$\Psi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-i\vec{k}''\vec{r}'} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}'), \quad (2.49)$$

ahol $\vec{k}'' = k\vec{n}$ a kifutó hullám \vec{r} irányba mutató hullámszámvektora. Ezt a kifejezést összehasonlítva a szórási amplitudó (2.7) definíciójával, leolvashatjuk, hogy

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}''\vec{r}'} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}'). \quad (2.50)$$

A Born közelítésben az eddigieken túl a Ψ hullámfüggvény helyébe a fenti képletben az e^{ikz} beeső síkhullámot helyettesítjük, azaz feltesszük, hogy a potenciál „gyenge” ahhoz, hogy jelentősen módosítsa a bejövő hullámfüggvényt. A szórt részecske impulzusváltozását $\vec{q} = \vec{k}'' - \vec{k}$ -val jelölve, ahol \vec{k} a beeső hullámfüggvény z irányú impulzusa, a szórási amplitudót leíró

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{q}\vec{r}'} V(\vec{r}'). \quad (2.51)$$

Born képlet azt állapítja meg, hogy a szórási amplitudó a potenciál Fourier transzformáltjával arányos abban az esetben, ha a szorócentrum „gyenge”. Ez a helyzet tipikusan nagy energiákon, ahol a szórási hatáskeresztmetszet az energiával fordítottan arányos. A differenciális hatáskeresztmetszetet a szórási amplitudó négyzete,

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} |V(\vec{q})|^2, \quad V(\vec{q}) = \int d^3r e^{-i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{r}) \quad (2.52)$$

adja meg.

2.1.6. Töltéeloszlás meghatározása nagyenergiás szórásban

Amennyiben egy elemi töltés $v(\vec{r})$ potenciálja ismert, akkor egy $\rho(\vec{r})$ töltéeloszlás esetén a teljes potenciál

$$V(\vec{r}) = \int d^3r' v(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (2.53)$$

az elemi töltés potenciáljának *konvolúciója* a töltéseloszlással. A Fourier transzformált tulajdonságai alapján a konvolúció Fourier transzformáltja a Fourier transzformáltak szorzata, azaz a differenciális hatáskeresztmetszet

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} |v(\vec{q})|^2 |F(\vec{q})|^2 d\Omega, \quad (2.54)$$

ahol $v(\vec{q})$ az elemi töltés potenciáljának, $F(\vec{q})$ pedig a töltéseloszlás Fourier transzformáltja. Az előbbi ismeretében a kísérletileg kimért differenciális hatáskeresztmetszetről az inverz Fourier transzformáció segítségével a töltéseloszlás rekonstruálható.

A Yukawa potenciál

Példaként számoljuk ki a Yukawa potenciál Fourier transzformáltját, illetve egy szórás hatáskeresztmetszetét Yukawa potenciálban ($c = \hbar = 1$ egységekben).

$$\begin{aligned} v(\vec{q}) &= \int d^3r e^{-i\vec{q}\vec{r}} g \frac{e^{-ar}}{r} = 2g\pi \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty r dr e^{-iqr x} e^{-ar} \\ &= \frac{2ig\pi}{q} \int_0^\infty dr [e^{-r(a+iq)} - e^{-r(a-iq)}] = \frac{4g\pi}{a^2 + q^2}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

ahol az a a hatótávolság reciproka, $a = m_\pi c/\hbar$, ami a $c = \hbar = 1$ egységekben egyszerűen $a = m_\pi$. Mivel a impulzusváltozás $\vec{q} = \vec{k}'' - \vec{k}$, és rugalmas szórás esetén a ki- és bemenő impulzus nagysága egyenlő, az m tömegű és k impulzusú részecskék szóródása a Yukawa potenciálon $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$,

$$d\sigma(k, \theta) = \frac{4g^2 m^2}{(m_\pi^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \quad (2.56)$$

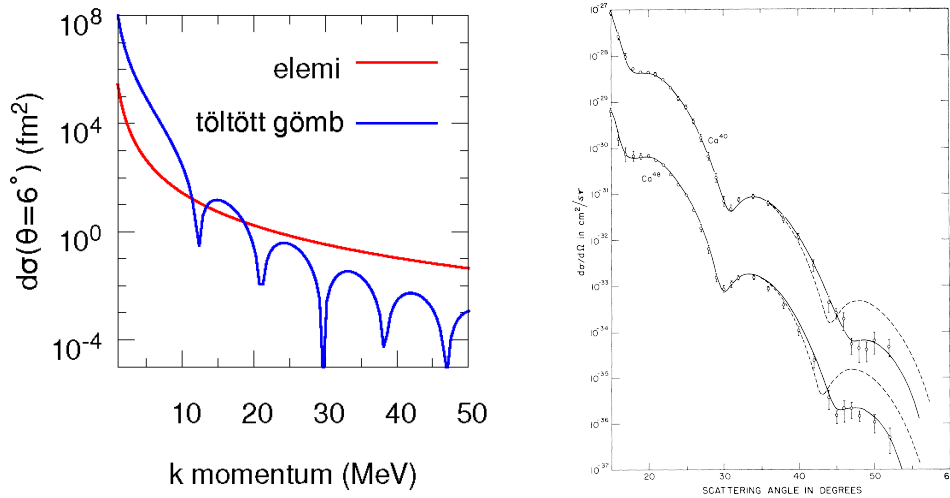
differenciális hatáskeresztmetszetet eredményez. Coulomb kölcsönhatásra a $g \rightarrow e$, $m_\pi \rightarrow m_\gamma = 0$ helyettesítést kell elvégezni.

Nagyenergiájú elektronokkal bombázva a proton, és feltételezve, hogy a proton töltéseloszlása egy lépcsőfüggvény,

$$e\rho(r) = e\rho_0\Theta(R - r), \quad (2.57)$$

azaz Fourier transzformáltja

$$F(q) = \frac{4\pi\rho_0}{q^3} (\sin qR - qR \cos qR), \quad (2.58)$$



2.3. ábra. Bal oldal: Nagy energiájú elektronok protonon való szórásának differenciális hatáskeresztmetszete pontszerű illetve egyenletes töltéeloszlású gömb feltételezésével. Jobb oldal: 757.5 MeV bombázó energiával készült differenciális hatáskeresztmetszet (pontok a mérések, a folytonos vonal az elméleti illesztés). A két görbe el van tolvva egymástól a láthatóság kedvéért. Forrás: J. B. Bellicard et al, Phys. Rev. Lett., **19**, 527 (1967). A mérés alapján rekonstruált töltéeloszlást a (3.3) ábra mutatja.

a differenciális hatáskeresztmetszet

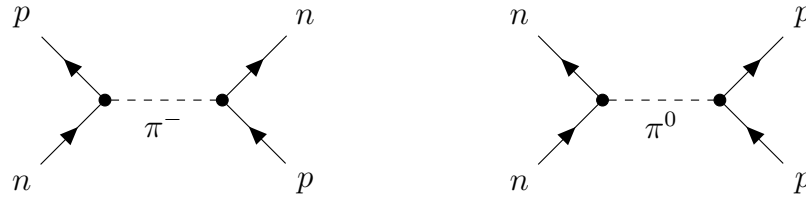
$$d\sigma(k, \theta) = \frac{\pi \rho_0^2 e^2 m_e^2}{8k^{10} \sin^{10} \frac{\theta}{2}} \left(\sin(2kR \sin \theta/2) - 2kR \sin \frac{\theta}{2} \cos(2kR \sin \theta/2) \right)^2 \quad (2.59)$$

Egy ilyen hatáskeresztmetszetet, illetve egy valódi mérés eredményét mutatunk be a (2.3) ábrán.

2.1.7. Kicszerélődés

A Yukawa potenciálon szóródó nukleon hatáskeresztmetszete a (2.56) képlet alapján erősen irányfüggő. Az előre- és hátraszórás aránya

$$\frac{\sigma(0)}{\sigma(\pi)} = 1 + \frac{4k^2}{m_\pi^2} = 1 + \frac{8m_N}{m_\pi^2} E. \quad (2.60)$$



2.4. ábra. A kicserélődéshez vezető két folyamat pn szórásban, a bal oldali folyamatban töltéscsere jön létre, a jobb oldaliban nem. Az idő felfelé folyik.

Ez az arány $E=100$ MeV energián kb. 40, azaz a szórásnak erősen előremutatónak kellene lennie. Ezzel szemben kísérletileg azt találták, hogy a hatáskeresztmetszet szimmetrikus a $\pi/2$ szögre, azaz

$$\sigma(\pi - \theta) = \sigma(\theta). \quad (2.61)$$

A jelenség oka a kicserélődés: pp és nn ütközésekben a két ütköző részecske megkülönböztethetetlen, ezért a a szórás folyamán a folyamatot is szimmetrizálni kell, és ez okozza a fenti szimmetriát. A pn ütközésekben a kölcsönhatást közvetítő töltött pionok „átviszik” a proton töltését a neutronra, így pl. a bejövő proton neutronként távozik (a (2.56) képletnek megfelelően nagyobb eséllyel előre irányba), azonban a kísérletben az ellenkező irányba távozó neutronból lett protont észleljük, és ez egyenlíti ki a hatáskeresztmetszeteket a két ellentétes irányban.

Matematikailag ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a kölcsönhatás a Yukawa potenciálon kívül még egy tagot tartalmaz, a térbeli szimmetrizálás operátorát,

$$\hat{V} = V_Y(r) \frac{1 + \hat{P}}{2}, \quad (2.62)$$

ahol \hat{P} a tértükrözés operátora.

A kicserélődés következménye, hogy a (2.28) parciális hullám kifejtésébe is bele kell venni a térbeli szimmetrizálást,

$$\begin{aligned} f(\theta) &\rightarrow \frac{1 + \hat{P}}{2} f(\theta) = \frac{1}{2} (f(\theta) + f(\pi - \theta)) \\ &\sim Y_l^m(\theta, \phi) + Y_l^m(\pi - \theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mivel $Y_l^m(\pi - \theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$, a páratlan l kvantumszámok esetén a szórási amplitudó teljes szimmetria esetén nulla, de a gyakorlatban is közel nulla,

azaz nagyon gyenge. Ezáltal a (2.29) parciális hullám kifejtésben az első (gömbhullám) tag igen jó eredményt ad viszonylag magas energiáig.

A fenti levezetésekben feltételeztük, hogy van egy központi szórócentrum. A magfizikában azonban általában két hasonló részecske lép kölcsönhatásba, és a fenti képletekben a tömegek a kéttestproblémának megfelelően módosulnak.

2.2. A kvantummechanikai kéttestprobléma

A kvantummechanikában két részecske esetén a Schrödinger egyenletet a két részecske \vec{r}_1 és \vec{r}_2 helyzetét tartalmazó Hamilton operátorral és a közös hullámfüggvénnyel lehet felírni,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad \hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E_t \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (2.64)$$

A $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ potenciál eltolási invariancia esetén csak a $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ relatív koordinátától függ, a Laplace operátor pedig átírható a tömegközéppont

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2 \quad (2.65)$$

és a relatív helyvektor segítségével. Felhasználva a

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \quad (2.66)$$

láncszabályt, a Hamilton operátor kinetikus része a

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R + \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r \quad (2.67)$$

alakot ölti, ahol $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ a relatív tömeg.

Ha a Ψ hullámfüggvényre feltesszük, hogy szeparálható egy tömegközépponti és egy relatív részre,

$$\Psi_t(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Phi(\vec{R}) \Psi(\vec{r}), \quad (2.68)$$

akkor a (2.64) differenciálegyenlet két részre esik szét,

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\Phi(\vec{R}) = E_{\text{tk}} \Phi(\vec{R}), \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(\vec{r})\right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}), \quad (2.69)$$

ahol E_{tk} a tömegközépponti mozgás (folytonos) energiája, míg E a relatív mozgás energiája, $E_{\text{k}} = E_{\text{tk}} + E$. A kéttestrendszer energiája alatt a továbbiakban a relatív energiát fogjuk érteni. Ha ez pozitív, szórásról, ha negatív kötött állapotról beszélünk.

Polárkoordináta rendszerben a (relatív) Schrödinger egyenlet a következő alakú,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi(\vec{r})) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \Psi(\vec{r}) \right] + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (2.70)$$

így a hullámfüggvény

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{lm} \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.71)$$

gömbhullámok szerinti kifejtésével, centrális potenciál esetén a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(u_l'' - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + V(r)u_l = E u_l \quad (2.72)$$

radiális Schrödinger egyenletet kell megoldani, $u_l(r=0) = 0$ határfeltétellel.

Erős kölcsönhatásban a paritás jó kvantumszám, és a Hamilton operátor sajátértékei határozott paritással bírnak. Mivel az l kvantumszámhoz tartozó hullámfüggvény paritása $(-1)^l$, a (2.71) kifejtésben csak páros, illetve csak páratlan l -ekre történik az összegzés.

2.3. Szórás potenciálgödörben

A magerők modellezésére a véges kölcsönhatás miatt első közelítésben válasszunk egy egyszerű, b sugarú és V_0 mélységű potenciálgödröt,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (2.73)$$

A (2.72) radiális Schrödinger egyenlet az $E > 0$ gömbszimmetrikus, $l = 0$ módusú szórásállapotra

$$u_{<}'' = -\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} u_{<} =: -\kappa^2 u_{<}, \quad u_{>}'' = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} u_{>} =: -k^2 u_{>}, \quad (2.74)$$

ahol $u_<$ az $r < b$ -re, míg $u_>$ az $r > b$ érvényes megoldás,

$$u_<(r) = A \sin \kappa r, \quad u_>(r) = B \sin(\kappa r + \delta_0), \quad (2.75)$$

mely nullához tart $r \rightarrow 0$ -ban, és teljesíti a (2.21) aszimptotikus általános kifejezést δ_0 fázistolással. A két megoldásnak, illetve deriváltjaiknak illeszkedni kell $r = b$ -ben,

$$\kappa \operatorname{ctg} \kappa b = k \operatorname{ctg}(kb + \delta_0). \quad (2.76)$$

Ebből az egyenletből a fázistolás meghatározható k , azaz az energia függvényében.

Kis energián, a $k \rightarrow 0$ határesetben

$$\kappa_0 \operatorname{ctg} \kappa_0 b = \lim_{k \rightarrow 0} k \operatorname{ctg}(\delta_0), \quad \kappa_0 = \frac{\sqrt{2\mu V_0}}{\hbar} \quad (2.77)$$

amiből a (2.29) kis energiás teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = 4\pi \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \delta_0} \longrightarrow \frac{4\pi}{\kappa_0^2 \operatorname{ctg}^2 \kappa_0 b}. \quad (2.78)$$

Bevezetve az

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} f(\theta) = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \quad (2.79)$$

szóráshosszat, a hatáskeresztmetszet a $k \rightarrow 0$ határesetben

$$\sigma(k) \longrightarrow 4\pi a^2 \quad (2.80)$$

alakban írható, ami az $2a$ sugarú merev gömb hatáskeresztmetszetével azonosítható, ezért az a szóráshossz felfogható a potenciál effektív hatósugarának.

2.4. Kötött állapotok

Kötött állapot esetén a (2.72) radiális Schrödinger egyenlet az $E < 0$ gömbszimmetrikus², $l = 0$ módusra

$$u_<'' = -\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} u_< =: -\kappa^2 u_<, \quad u_>'' = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} u_> =: k^2 u_>, \quad (2.81)$$

²mivel az energia nem lehet mélyebb a potenciálgödörnél, $E + V_0 > 0$.

alakú, ahol $u_<$ az $r < b$ -re, míg $u_>$ az $r > b$ érvényes megoldás,

$$u_<(r) = A \sin \kappa r, \quad u_>(r) = B e^{-\kappa r}, \quad (2.82)$$

mely nullához tart $r \rightarrow 0$ -ban, és véges $r \rightarrow \infty$ -ben. A két megoldásnak, illetve deriváltjaiknak illeszkedni kell $r = b$ -ben,

$$\kappa \operatorname{ctg} \kappa b = -k. \quad (2.83)$$

Ha $E \ll V_0$, azaz $k \approx 0$ -nak tekinthető, akkor a megoldások

$$\kappa_n b = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \quad (2.84)$$

amiből $\kappa_n = \frac{\sqrt{2\mu V_0}}{\hbar}$ felhasználásával

$$V_0^{(n)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu b^2} (2n + 1)^2 = V_0^{(0)} (2n + 1)^2. \quad (2.85)$$

Beírva az erős kölcsönhatásra jellemző $b \sim 1.5$ fm értéket, $V_0^{(0)} \approx 46$ MeV mélységű potenciálgödör adódik, melyben egy, $E \approx 0$ energiájú állapot található. A következő, $n = 1$ esetben a gödörnek kilencszer kell mélyebbnek lennie, és ekkor egy negatív, és egy közel nulla energiájú kötött állapot található benne, azaz ahhoz, hogy az alapállapoton felül gerjesztett állapota is legyen a kötött rendszernek, igen mély potenciálgödörre van szükség.

Gerjesztett állapotot elő lehet állítani még a magasabb impulzuszórájú módusok segítségével is. A (2.72) radiális Schrödinger egyenlet alapján azt látjuk, hogy a potenciál helyett a

$$V_{\text{eff}} = V_0 + \frac{\hbar^2 l(l + 1)}{2\mu r^2} \quad (2.86)$$

effektív potenciál hatása érvényesül. Ez kis távolságokon erősen taszító, így azt várjuk, hogy az impulzuszórájú növekedtével a hullámfüggvény egyre inkább kiszorul a vonzó potenciál tartományából, és így egyre csökken az energiája, azaz a hullámfüggvény megkötéséhez egyre mélyebb potenciálra lesz szükség.

Vizsgáljuk meg az $l = 1$ esetet. A (2.72) radiális Schrödinger egyenlet megoldásai ilyenkor

$$u_< = A \left(\frac{\sin \kappa b}{\kappa b} - \cos \kappa b \right), \quad u_> = B e^{-\kappa b} \left(1 + \frac{1}{\kappa b} \right) \quad (2.87)$$

$r < b$, illetve $r > b$ -re. Az illesztési feltétel ebben az esetben a

$$\kappa b \sin \kappa b = 0 \quad (2.88)$$

egyenlettel egyenértékű, azaz

$$\kappa b = \pi(n + 1), \quad V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu b^2} (n + 1)^2 = V_0^{(0,l=1)} (n + 1)^2, \quad (2.89)$$

amiből az $l = 1$ módus megkötéséhez szükséges legkisebb potenciál 4-szer mélyebbnek adódik, mint az $l = 0$ -hoz tartozó. Ebben a potenciálban egy negatív, $l = 0$, és egy közel nulla energiájú, $l = 1$ gerjesztett állapot található. Általánosan belátható, hogy a magasabb impulzusmomentumú állapotok megkötése mélyebb potenciálgödröt igényel, melyben az alacsonyabb l -ű állapotok kötöttek.

2.5. A deuteron

A deuteron kísérletileg mért tulajdonságai a következők:

1. Csak alapállapota létezik (pn), $E_B=2.22$ MeV kötési energiával, azaz a deuteron „gyengén” kötött, 1.11 MeV/részecske kötéssel, szemben a ${}^4\text{He}$ 7.1 MeV/részecske kötésével.
2. Az alapállapot spinje $S=1$.
3. Nem létezik pp , illetve nn kötött állapot.
4. Mágneses momentuma $0.86 \mu_N$.
5. Kvadrupólmomentuma 3 mb.
6. Nagy a mérete, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 2.1$ fm

2.5.1. Centrális potenciál

A kísérletek alapján a deuteron közel gömbszimmetrikus, mágneses momentuma

$$\mu_d = 0.86\mu_N \approx \mu_p + \mu_n = 2.79\mu_N - 1.91\mu_N = 0.88\mu_N, \quad (2.90)$$

közel megegyezik egy $l=0$ állapotban levő protonból és neutronból álló rendszer mágneses momentumával, valamint kvadrupólmomentuma is kicsi, jelezve, hogy

a deformáltság is kicsi. Ennek alapján első közelítésben feltehetjük, hogy a magerőket centrális potenciállal lehet leírni. A legegyszerűbb ilyen, a magerők véges hatótávolságát figyelembe vevő potenciál az egyszerű potenciálgödör, amit a 2.4 fejezetben tárgyaltunk. Mivel ez minőségileg elegendő módon leírja a számunkra szükséges általános viselkedést, itt nem vizsgáljuk meg a realisztikusabb modelleket (pl. Yukawa potenciál) tulajdonságait.

Potenciálgödör esetén a kötött állapotokat a (2.83) egyenlet írja le, és „gyengén” kötött rendszer esetén a kötéshez szükséges potenciálgödör mélységét a (2.85) egyenlet adja meg. A kifejezés tartalmazza a potenciálgödör szélességét, mely az erős kölcsönhatás tulajdonságai alapján 1-2 fm lehet. Helyettesítsük be most ebbe a kifejezésbe a nagy magok esetében kiszámolható két nukleon közötti átlagos távolságot,

$$b^3 := \frac{1}{A} \frac{4\pi}{3} R^3, \quad R = r_0 A^{1/3}, \quad (2.91)$$

ahol $r_0 = 1.05 - 1.2$ fm. Átlagértéket véve, $b \approx 1.7$ fm adódik, aminek alapján a nulla energiával való kötéshez szükséges potenciálgödör mélysége (2.85)

$$V_0(E = 0) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu b^2} \approx 36 \text{ MeV}. \quad (2.92)$$

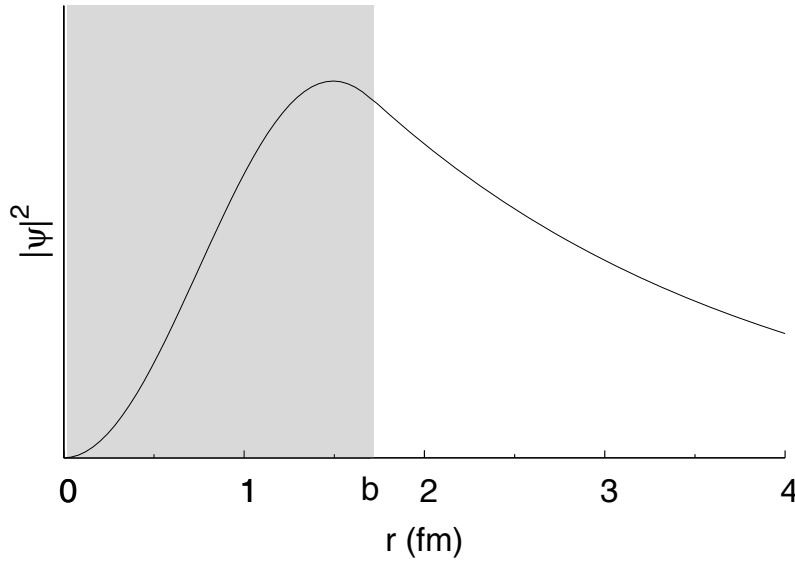
Láttuk, hogy az $l=1$ hullámfüggvény ennek négyszerese, az $l=0$ első gerjesztett állapot ennek kilencszerese esetén jelenik meg. Mivel ilyen állapotokat nem látunk, a potenciál mélységének valahol nem sokkal 36 MeV fölött kell lennie. A (2.83) kötési egyenletet megoldhatjuk numerikusan vagy grafikusán is, a deuteron valódi, $E = -E_B = -2.22$ MeV kötési energiájával, és az ehhez szükséges potenciálgödör mélysége

$$V_0(E = -2.22) \approx 48 \text{ MeV}, \quad (2.93)$$

a kötési energia a potenciál 5%-a, és a potenciálgödör mélysége távol van attól, hogy még egy állapot alakuljon ki. (Megjegyezzük, hogy a $4 V_0(E = 0)$, az $l=1$ állapotot megköti érték esetén az alapállapot energiája már a potenciál felét teszi ki.)

A deuteron hullámfüggvényét megvizsgálva (2.5) ábra azt látjuk, hogy annak több, mint 50%-a a potenciálgödörön kívül található, $\int_b^\infty dr u(r) > 0.5$. A két részecske átlagos távolsága,

$$\bar{r} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left(\int_0^\infty dr |u(r)|^2 \right)^{1/2} \approx 3.3 \text{ fm} \quad (2.94)$$



2.5. ábra. A deuteron valószínűségeloszlása a távolság függvényében egy $b=1.7$ fm nagyságú, 48 MeV mély potenciálgödörben. A hullámfüggvénynek több, mint a fele „kilóg” a potenciálgödörből.

nagyobb, mint a potenciálgödör szélessége. A mért érték ennél kisebb (2.1 fm), de a kvalitatíve igaz, hogy a gyenge kötés következtében a deuteron viszonylag nagy térfogatra terjed ki, az egy részecske által elfoglalt térfogat az nyolcszorosa a protonénak, és négyszerese az alfa részecskéjének.

2.5.2. Pauli elv kétrészecske állapotban

A Pauli elv alapján egy fermionokból álló rendszer hullámfüggvénye antiszimmetrikus a részecskék felcserélésével szemben. Nukleonrendszer esetén a teljes hullámfüggvényt a részecskék helyzetével, spinjével és izospinjével jellemezzük,

$$\Psi_{12} = \Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{t}_1, \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{t}_2) = -\Psi(\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{t}_2, \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{t}_1) = -\Psi_{21}. \quad (2.95)$$

(Ennek következménye, hogy a kvantumszámok egyezése esetén a közös hullámfüggvény nulla, azaz két részecske nem fordulhat elő ugyanabban a kvantumállapotban.) A teljes hullámfüggvényt szeparhatjuk hely-, spin- és izospinfüggő részre,

$$\Psi_{12} = \phi(\vec{r}) \chi_S \zeta_T, \quad (2.96)$$

ahol kihasználtuk, hogy eltolásinvariancia esetén a fizika mennyiségek csak az \vec{r} relatív koordinátától függenek, $\chi_S(s_1, s_2)$ a spin-, $\zeta_T(t_1, t_2)$ pedig az izospinhullámfüggvény. A spinösszeadás szabályai szerint

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \begin{cases} S = 1 & |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) & \text{triplett} \\ S = 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) & \text{szinglett} \end{cases}, \quad (2.97)$$

azaz a triplett állapot nem változik a két spin felcserélésére, a szinglett viszont előjelet vált,

$$\hat{P}_S \chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \chi(\vec{s}_2, \vec{s}_1) = (-1)^{S+1} \chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2). \quad (2.98)$$

A spin és izospin hasonlósága miatt hasonló összefüggést lehet felírni az izospinre is. A (2.96) teljes hullámfüggvény (2.95) antiszimmetrikus tulajdonsága alapján így a következő állapotok valósíthatók meg:

tér	spin	izospin
+	+ ($S=1$)	- ($T=0$)
+	- ($S=0$)	+ ($T=1$)
-	+ ($S=1$)	+ ($T=1$)
-	- ($S=0$)	- ($T=0$)

2.1. táblázat. A teljes kétrészecske hullámfüggvény komponenseinek paritása a két részecske felcserélés hatására.

Mint a 2.4 fejezetben láttuk a legalacsonyabb energiájú állapot a gömbszimmetrikus, $l=0$ módusban valósul meg, azaz a

$$\hat{P} \phi(\vec{r}) = \phi(-\vec{r}) = (-1)^l \phi(\vec{r}) \quad (2.99)$$

paritástulajdonság alapján azt a páros térbeli hullámfüggvény írja le, és a teljes hullámfüggvény a 2.1 táblázat első két sora alapján valósul meg alapállapotban. Az állapotok leírására szolgáló $^{2S+1}L_J$ (spin, pályaimpulzusmomentum, teljes impulzusmomentum) jelölés alapján ezek az állapotok: $^1S_0(T=1)$, $^1D_2(T=1)$, $^3S_1(T=0)$, $^3D_1(T=0)$, \dots

2.5.3. Spinfüggő potenciál

Mivel a kísérletek alapján a deuteron teljes spinje $S=1$, ezért az alapállapot spin triplett, izospin szinglett állapotban található. Ez megvalósulhat pn esetén, mivel

ilyenkor $T_3=0$, ami a $T=0$ izospin létező módusa. Biproton (pp), illetve bineutron (nn) esetén azonban $T_3=1$, illetve -1 , és ez csak $T=1$ izospinállapotban valósulhat meg, azaz páros térbeli hullámfüggvény esetén a pp és nn csak $S=0$ szinglett állapotban létezhetnek. Mivel szinglett kötött állapotokat nem figyeltek meg, ezért fel kell tennünk, hogy a magerők spinfüggők, másképp hatnak spin triplett és spin szinglett hullámfüggvény esetén.

A legyszerűbb, a két spint tartalmazó skalároperátor a $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$. Mivel a teljes spin $\vec{S} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$,

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{4} (\vec{\sigma}_1^2 + 2\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2^2) = \frac{1}{2} (3 + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2), \quad (2.100)$$

ahol kihasználtuk, hogy $\vec{\sigma}^2 = 3 \cdot \hat{1}$. Ezek alapján egy spinfüggést leíró

$$\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 = 2\hat{S}^2 - 3, \quad \langle \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 \rangle = 2S(S+1) - 3 = \begin{cases} -3 & \text{szinglett} \\ 1 & \text{triplett} \end{cases} \quad (2.101)$$

leíró operátor várható értéke más szinglett, és már triplett állapot esetén. A teljes operátor

$$\hat{V}_S = V_S(\vec{r}) \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 \quad (2.102)$$

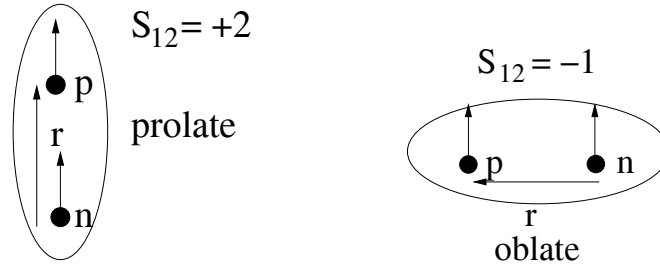
alakú, ahol $V_S < 0$, hogy a triplett állapothoz tartozó energia a tapasztalatok alapján kisebb legyen a szinglett energiánál. Annak érdekében, hogy ne kapjunk szinglett kötött állapotot, a spin energiának átlagban meg kell haladnia kötési energia negyedrésztét.

2.5.4. A tenzoreroő

A mágneses momentum vizsgálata, valamint a kvadrupólmomentum nem nulla volta jelzi, hogy a deuteron alapállapota nem pusztán az $l=0$ módusból áll. Viszont a 2.4 fejezetben láttuk, hogy centrális potenciálban nem keverednek össze a különböző impulzuszórájú járulékok, így fel kell tennünk, hogy a potenciálnak van egy nem centrális járuléka.

A potenciál a rendszert jellemző vektorok – a spinek és a helyvektor – irányától függhet. A két spin szorzatát már felhasználtuk a spinfüggésnél (és ez önmagában nem kever be más l számú állapotot a hullámfüggvénybe), így a legyszerűbb kombináció a spinoperátorok és a helyvektor szimmetrikus szorzata. A tenzoreroő operátorát konvencionálisan

$$\hat{S}_{12} = 3 (\vec{\sigma}_1\vec{n}) (\vec{\sigma}_2\vec{n}) - (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2), \quad (2.103)$$



2.6. ábra. A tenzorerő hatása prolate (szivar) és oblate (diszkosz) állapotokban.

ahol az első tag előtti szorzó és a második tag biztosítja, hogy szinglett állapotban az operátor hatása zérus, \vec{n} pedig a helyvektor irányába mutató egységvektor. A teljes tenzorerő operátor megszorozódhat egy tetszőleges (centrális) helyfüggő résszel is,

$$\hat{V}_T = V_T(r) \hat{S}_{12}. \quad (2.104)$$

Vizsgáljuk meg az operátor hatását abban az esetben, amikor a proton és neutron spinje ellenkező irányban áll,

$$\begin{aligned} \langle \uparrow\downarrow | (\vec{\sigma}_1 \vec{n}) (\vec{\sigma}_2 \vec{n}) | \uparrow\downarrow \rangle &= \langle \downarrow\uparrow | (\vec{\sigma}_1 \vec{n}) (\vec{\sigma}_2 \vec{n}) | \downarrow\uparrow \rangle = -\cos^2 \theta \\ \langle \uparrow\downarrow | (\vec{\sigma}_1 \vec{n}) (\vec{\sigma}_2 \vec{n}) | \downarrow\uparrow \rangle &= \langle \downarrow\uparrow | (\vec{\sigma}_1 \vec{n}) (\vec{\sigma}_2 \vec{n}) | \uparrow\downarrow \rangle = \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Szinglett állapotban a hullámfüggvény spinfüggő része

$$\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.106)$$

és az így ebben az állapotban a $(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})$ operátor hatása $-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$. Mivel a $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$ operátor hatása a (2.101) alapján szinglettre -3, ezért az \hat{S}_{12} operátor teljes hatása $3 \cdot (-1) - (-3) = 0$. A szinglett állapotra a tenzorerő nem hat.

Triplett állapotban

$$\chi_{t,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.107)$$

így a $(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})$ operátor hatása $-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sim P_2(\cos \theta)$, azaz ez az operátor csatolja egymáshoz az $l \pm 2$ módusokat.

A részecskék elhelyezkedése alapján a deuteronban két fontos beállítás van: amikor a helyvektor a spinek irányával párhuzamos, illetve merőleges. Párhuzamos beállítás esetén (2.103) első tagja a $\sigma_{1,z} \sigma_{2,z}$ operátor mátrixeleme, és 1. Mivel

triplett állapotban a (2.101) alapján a második tag triplettre 1, a tenzorero hatása prolate (pozitív kvadrupólmomentum) állapotra +2. Merőleges beállítás esetén az első tag skalárszorzata nulla, és a tenzorero járuléka oblate (negatív kvadrupólmomentum) állapotra -1.

A kísérletek alapján a deuteron kvadrupólmomentuma pozitív, és a prolate állapot valósul meg. Ehhez újfent az szükséges, hogy a V_T szorzófaktor átlagértéke negatív legyen. Mivel az $l = 2$ állapot bekeveredése növelné az állapot energiáját, a V_T tagnak megfelelően nagynak kell lennie, hogy ezt az energianövekedést ellensúlyozza. A kompenzálás kiszámításához szükség van az $l = 2$ módus erősségére a hullámfüggvényben.

A keveredés után a deuteron hullámfüggvénye az $l = 0$ és $l = 2$ állapotok lineárkombinációja

$$\Psi = a_0 \Psi_0 + a_2 \Psi_2. \quad (2.108)$$

A mágneses momentum a keveredésnek megfelelően

$$\mu_d = |a_0|^2 \mu_0 + |a_2|^2 \mu_2 \quad (2.109)$$

lesz, ahol mind a μ_0 , mind a μ_2 kiszámolható. A kísérleti értéket az $|a_2|^2 \approx 4\%$ értékkel lehet reprodukálni.

Mindezek alapján a deuteron kísérleti tulajdonságai alapján a magerőket a

$$\hat{V} = V_C(r) + V_S(r) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + V_T(r) \hat{S}_{12} \quad (2.110)$$

potenciál operátorral jellemezhetjük.

2.6. A magerők tulajdonságai a szórás alapján

Ebben a fejezetben visszatérünk a szórásproblémához, és megnézzük, hogy a kísérleti tapasztalatok milyen feltételezéseket indukálnak a magerők tulajdonságaira.

A (2.77)-(2.79) szóráshossz definíciója és tulajdonságai alapján a nulla energiájú határesetben a szórás és a kötött állapotok tulajdonságai illeszkednek. A (2.76)-ból a cotangens függvény

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \text{ctg}\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta} \quad (2.111)$$

kifejtése alapján a fázistolás kifejezhető,

$$\text{ctg}\delta_0 = \frac{\kappa \text{ctg}\kappa b \text{ctg}kb + k}{k \text{ctg}kb - \kappa \text{ctg}\kappa b}, \quad (2.112)$$

és a $k \rightarrow 0$ határesetben

$$\text{ctg}\delta_0 \rightarrow \frac{1}{k} \frac{\kappa_0 \text{ctg}\kappa_0 b}{1 - \kappa_0 b \text{ctg}\kappa_0 b}. \quad (2.113)$$

A kötött állapotokra vonatkozó (2.83) egyenlet alapján, $k \rightarrow 0$ határesetben azonban

$$\kappa \text{ctg}\kappa b = -\frac{\sqrt{2\mu E_B}}{\hbar} \approx \kappa_0 \text{ctg}\kappa_0 b \quad (2.114)$$

és a (2.78) hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \rightarrow 4\pi b^2 \left(\frac{\hbar}{b\sqrt{2\mu E_b}} + 1 \right)^2 = 4\pi b^2 \left(1 - \frac{\tan \kappa_0 b}{\kappa_0 b} \right)^2 \quad (2.115)$$

alakban írható, mely csak a potenciálgödör szélességétől és mélységétől, azaz a potenciál paramétereitől függ. Behelyettesítve a deuteron kötött állapota alapján becsült értékeket, az

$$a = b \left(1 - \frac{\tan \kappa_0 b}{\kappa_0 b} \right) \quad (2.116)$$

szóráshossz értékére $a \approx 5.2$ fm, a hatáskeresztmetszetre pedig 3.4 barn értéket kapunk³, ami azonban jóval kisebb a 20 barn pn szórás kísérleti eredményénél. A magyarázat kézenfekvő: a szórási folyamat nemcsak a kötött tripllett állapottól függ, abba belejátszik a nem kötött szinglett állapot is, és a teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{1}{4} |a_S|^2 + \frac{3}{4} |a_T|^2 \right), \quad (2.117)$$

a szinglett és tripllett állapot statisztikai súlyúknak megfelelő keveredése. Mivel a szinglett állapot nem kötött, ezért a szóráshossz rá nézve negatív (taszítást érzékel, amelyhez tartozó fázistolás negatív). A kísérleti értékek

$$a_S = -23.7 \text{ fm}, \quad a_T = 5.4 \text{ fm}. \quad (2.118)$$

³Vegyük észre, hogy 1000-szer nagyobb, az eddig használt mb mértékegységnél!

Ezekből az értékekből visszaszámolható a triplett állapothoz tartozó $V_0^{(t)}$, valamint a szinglett-hez tartozó $V_0^{(s)}$ potenciálgödör mélység, amiből meghatározható a spinfüggő rész $\langle V_S \rangle$ nagysága.

Mi a helyzet pp , illetve nn szórásban? Itt a Pauli elv miatt a triplett állapot nem valósulhat meg, a teljes hatáskeresztmetszet csak a szinglett módus szóráshosszától függ. A kísérletek alapján

$$a_S^{pp} = -7.8 \text{ fm}, \quad a_S^{nn} = -17 \text{ fm}, \quad (2.119)$$

ami első pillanatra teljesen ellentmond az erős kölcsönhatás izospin függetlenségének. Azonban a pp ütközésekben a Coulomb kölcsönhatás számottevő interferenciát okoz az erős kölcsönhatással, és ha a Coulomb kölcsönhatást leválasztjuk a kísérletekről, a pp reakció szóráshosszára az nn -hez hasonló értéket kapunk. Az nn és pn reakciók szinglett csatornája közötti eltérést pedig például az eltérő mágneses momentum viselkedés okozza (ellentétes mágneses momentumok pn , azonosak nn esetén), és figyelembe véve a ezeket az egyéb effektusokat, az erős kölcsönhatásra jellemző szóráshosszak hasonló értéket vesznek fel.

Megjegyezzük, hogy az nn szórási kísérletileg igen bonyolult lenne, ezért helyette inkább vagy a három részecskés $n + d \rightarrow p + n + n$ folyamatot, vagy a $p + {}^3\text{He}$ és $p + {}^3\text{H}$ folyamatok különbségét vizsgálják.

2.6.1. A nukleon-nukleon hatáskeresztmetszet kísérleti tulajdonságai

A kísérleti megfigyelések alapján a hatáskeresztmetszet $E \sim 400\text{-}500$ MeV energiáig közel izotrop (nagyobb energián már kezd jelentőssé válni a rugalmatlan – pion keltő – folyamat is). A (2.30) képlet alapján ezeken az energiákon, a mért 30 mb körüli hatáskeresztmetszet alapján számolható maximális kb. 1 fm ütközési paramétert feltételezve, az $l=0,1,2$ és 3 módusok gerjesztődnek jelentősebb mértékben. Ezt megerősíti az is, hogy az $l=0$ módus járuléka a teljes hatáskeresztmetszethez a (2.28) alapján

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 < \frac{4\pi}{k^2} \sim 13 \text{ mb} \quad (E = 400 \text{ MeV}), \quad (2.120)$$

azaz önmagában nem elegendő a teljes megfigyelt hatáskeresztmetszet leírásához.

Az előzőekben megállapítottuk, hogy a páratlan impulzusmomentumú szórások amplitúdója a kicserélődés következtében nagyon kicsi, és így a (2.29) parciális hullám összegzéshez nem ad jelentős járulékot. További módosulást okozhat,

ha feltesszük, hogy a magerőkben van spin-pálya csatoló tag, mely az atomfizikához hasonlóan $\hat{L}\hat{S}$ alakú, és következtében sem a spin, sem a pályaimpulzus momentum nem megmaradó (jó) kvantumszám, hanem helyette az állapotokat a $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ teljes impulzusmomentum sajátértékei szerint csoportosítjuk. A (2.29) parciális hullám kifejtésbe így egy adott l esetén nem egy fázistolás jelenik meg, hanem teljes impulzusmomentum lehetséges három ($j=l-1, l, l+1$) beállításának megfelelően a három j függő fázistolás összege. A tapasztalat alapján a vizsgált energiatarományig ezek a fázistolások az interferenciatagokban nagyjából kioltják egymást, így nem adnak jelentős járulékot a differenciális hatáskeresztmetszet szögfüggéséhez, és azt a domináns $l=0$ izotróp módus határozza meg. Ezzel szemben a (2.28) teljes hatáskeresztmetszethez az interferenciatagok (különböző l -ű tagok) nem adnak járulékot, hanem csak az azonos l módusúak, és ezek növelik fel a hatáskeresztmetszetet a megfigyelt értékre.

Például az $l = 1$ módusig a szórási amplitudó (2.28) parciális hullám kifejtésben szereplő

$$f(\theta) = \frac{1}{k} (e^{i\delta_0} \sin \delta_0 P_0(\cos \theta) + 3e^{i\delta_1} \sin \delta_1 P_1(\cos \theta)) \quad (2.121)$$

kifejezés az spin-pálya csatolásnak megfelelően a

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \left(e^{i\delta_0} \sin \delta_0 P_0(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) \sum_{j=0}^2 e^{i\delta_1^j} \sin \delta_1^j \right) \quad (2.122)$$

módon írható át, ahol δ_1^j az $l = 1, j$ módus fázistolása. Az

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \quad (2.123)$$

operátor várható értéke triplétt állapotban a teljes impulzusmomentum ($j = 0, 1, 2$) szerint $-2, -1$ és 1 , így elegendően nagy csatolással elérhető, hogy a különböző fázistolások a P_0, P_1 interferenciatagban kioltják egymást. A kísérletek szerint kis energián azonban nincsen jel arra, hogy a spin-pálya csatolás működne, így ennek a tagnak a hatósugara kisebb, mint a centrális potenciálé (kb. 0.7 fm).

A kísérletek alapján azonban kb. 600 MeV beeső energiáig a teljes hatáskeresztmetszet is energiafüggetlennek tekinthető. Az előző érvelés alapján azt várnánk, hogy az energia függvényében az újabb és újabb impulzusú módusok bekapcsolódásával növekszik a hatáskeresztmetszet. Ezt a növekedést két jelenség is korlátozza: egyrészt az energia növekedésével az $1/k^2 \sim 1/E$ faktor csökkenti a hatáskeresztmetszetet, másrészt az energia változásával változik a fázistolás értéke.

V

c

r

2.7. ábra. A magerők sematikus ábrája: a véges hatótávolságú vonzó potenciál kis távolságokon ($c \sim 0.5$ fm) taszításba megy át.

A fázistolás energiafüggése könnyen megérthető: mint látni fogjuk a magerők rendelkeznek egy taszító törzssel, azaz ha két nukleon túl közel kerül egymáshoz, akkor az addigi vonzást taszítás váltja fel. A potenciál karakterének változása a fázistolásban is megmutatkozik, a vonzásnak megfelelő pozitív fázistolás a taszításnak megfelelő negatívba vált át, ahogy a két részecske a nagyobb energia következtében egyre közelebb tud kerülni egymáshoz.

Mindezek a hatások együttesen azt eredményezik, hogy a teljes hatáskeresztmetszet kb. 600 MeV beeső energiáig közel energiafüggetlen.

A potenciál taszító törzsének kísérleti vizsgálata a fázisanalízis módszerével történik, a különböző parciális hullámok kiválasztásával megállapítják azok járulékat a hatáskeresztmetszethez, és így a fázistolásukat, a bombázó energia függvényében. 200-300 MeV energia körül a fázisok a kezdeti pozitív értékből negatívba válnak: a kezdeti vonzó potenciál taszítóvá válik. Az ennek az energiának megfelelő impulzus, és a Heisenberg reláció felhasználásával ez a két részecske közötti 0.3-0.5 fm távolságnál következik be.

A Heisenberg reláció következtében a taszító törzset momentum- vagy sebességfüggő potenciálként is értelmezhetjük: nagyobb energiájú ütközésben a részecskék közelebb kerülnek egymáshoz, és egyre jobban érzik a taszító törzset. Például, egy nem lokális potenciálban, a potenciál sorfejtésében elvégezve a $\vec{\partial} \rightarrow \frac{i}{\hbar}\vec{p}$ helyettesítést, a sorfejtés magasabb tagjaiban megjelennek az impulzusfüggést leíró tagok,

$$V(\vec{r}, \vec{r}') \approx V_0(\vec{r}) + V_1(\vec{r})(\vec{r}\vec{p}) + V_2(\vec{r})(\vec{r}\vec{p})^2 + \dots, \quad (2.124)$$

ahol

$$\left(\prod_i r_i \right) V_i(\vec{r}) = \int d^3 r' \left(\prod_i (r'_i - r_i) \right) V(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (2.125)$$

2.7. A kétnukleon potenciál alakja a kísérletek alapján

Összefoglalva az eddigieket, a szórási kísérletek alapján a kötött állapotok vizsgálatakor felírt (2.110) potenciálalak tovább bővül egy spin-pálya csatolással,

$$\hat{V} = \frac{1 + \hat{P}}{2} \left(V_C(r) + V_S(r) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + V_{LS}(r) \vec{L} \vec{S} + V_T(r) \hat{S}_{12} \right), \quad (2.126)$$

és tudjuk, hogy a centrális potenciálnak rendelkeznie kell egy taszító törzzsel, vagy impulzusfüggőnek kell lennie.

	1S_0	3S_1	1P_1	3P_0	3P_1	3P_2	1D_2	3D_1	3D_2	3D_3
V_c	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
$V_S(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)$	-3	+1	-3	+1	+1	+1	-3	+1	+1	+1
$V_{LS}(\vec{L} \vec{S})$	0	0	0	-2	-1	+1	0	-3	-1	+2
$V_T S_{12}$	0	3D_1	0	0	0	3F_2	0	3S_1	0	3G_3

2.2. táblázat. A kétteszterpotenciál különböző tagjainak járuléka a különböző állapotokra.

2.8. A kétnukleon potenciál alakja a szimmetriaelvek alapján

Elméleti úton is megkérdezhethetjük, hogy mi a kétnukleon potenciál általános alakja, ha ismerjük a kölcsönhatás szimmetriáit:

- Eltolási invariancia: a potenciál csak a $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$, és $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ kombinációktól függhet.
- Időeltolási invariancia: időtől explicit módon nem függ.

2.8. A KÉTNUKLEON POTENCIÁL ALAKJA A SZIMMETRIAELVEK ALAPJÁN⁶⁵

- Forgás invariancia: skalár kell hogy legyen.
- Tértükrözési invariancia: paritás megmarad.
- Időtükrözési invariancia: időparitás megmarad.
- Két rész felcserélésével szembeni invariancia.
- Izotóp spin z tengelye körüli forgás invariancia: töltésmegmaradás.

A rendelkezésre álló mennyiségek a helyvektorok, az impulzusvektorok, a spinnek Pauli mátrix vektorai, illetve az ezekből származtatható mennyiségek, pl. az impulzusmomentum $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Nézzük meg, hogy mi ezeknek a vektoroknak a szimmetriaviselkedése.

	Tértükrözés	Időtükrözés
\vec{r}	V	+
\vec{p}	V	-
$\vec{\sigma}$	AV	-
$\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2$	AV	+
$\vec{\sigma} \times \vec{r}$	V	-
$\vec{\sigma} \times \vec{p}$	V	+
$\vec{r} \times \vec{p}$	AV	-

2.3. táblázat. Vektorok viselkedése tér- és időtükrözés hatására.

Mivel a spin operátora (Pauli mátrix) impulzusmomentum jellegű, ezért az tértükrözésre hatására nem fordul meg, axiálvektor (AV). Két vektor vektoriális szorzata axiálvektort ad (a $-\vec{r}$, $-\vec{p}$ és $\vec{r} \times \vec{p}$ jobbsodrású rendszert alkotnak). Ugyanílyen megfontolások alapján két axiálvektor vektoriális szorzata mindig axiálvektor, de egy axiálvektor és egy vektor vektoriális szorzata mindig vektor. Az impulzus időtükrözés hatására előjelet vált ($\vec{p} \sim \dot{\vec{r}}$), így a belőle származtatott mennyiségek is (impulzusmomentum) hasonló tulajdonsággal bírnak.

Általános esetben a potenciál a skalár \vec{r}^2 , \vec{p}^2 , \vec{L}^2 , $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$, ... mennyiségek függvénye. Ezek nem mind függetlenek, például

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} \times \vec{p})(\vec{r} \times \vec{p}) &= \vec{L}^2 \\
 (\vec{r}\vec{p})(\vec{r}\vec{p}) &= \vec{r}^2 \vec{p}^2 - \vec{L}^2 \\
 \vec{r}\vec{r} &= r^2, \quad \vec{p}\vec{p} = p^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.127}$$

Továbbá a Pauli mátrixok

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}) + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.128)$$

tulajdonsága miatt a $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ mindegyike csak egyszer fordulhat elő.

A skalár kombinációk (ezek automatikusan invariánsak a tértüktrözésre) az idő- illetve a két rész cseréjére a következő módon trnszformálódnak:

	Időtüktrözés	2 rész csere
1 (skalár)	+	+
$(\vec{r}\vec{p})$	-	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)$	+	+
$(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)(\vec{r} \times \vec{p})$	+	+
$(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2)(\vec{r} \times \vec{p})$	+	-
$(\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{p})$	+	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{r})$	+	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) + (\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{r})$	-	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) - (\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{r})$	-	-
$(\vec{\sigma}_1(\vec{r} \times \vec{p}))(\vec{\sigma}_2(\vec{r} \times \vec{p}))$	+	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(\vec{r}\vec{p})$	-	+
$((\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)(\vec{r} \times \vec{p}))(\vec{r}\vec{p})$	-	-
$((\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2)(\vec{r} \times \vec{p}))(\vec{r}\vec{p})$	-	+
$(\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{p})(\vec{r}\vec{p})$	-	+
$((\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) + (\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{r}))(\vec{r}\vec{p})$	+	+
$((\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) - (\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{r}))(\vec{r}\vec{p})$	+	-
$(\vec{\sigma}_1(\vec{r} \times \vec{p}))(\vec{\sigma}_2(\vec{r} \times \vec{p}))(\vec{r}\vec{p})$	-	+

2.4. táblázat: Skalár kombinációk viselkedése időtükrözés és a két rész cseréje esetén.

Ebből kiválasztva a szimmetriát megtartó tagokat kapjuk a kétnukleon potenciál általános alakját,

$$\begin{aligned} \hat{V} = & V_1 + V_2(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2) + V_3(\vec{\sigma}_1\vec{r}\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{r}) + V_4(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)(\vec{r} \times \vec{p}) \\ & + V_5\left(\vec{\sigma}_1(\vec{r} \times \vec{p})\right)\left(\vec{\sigma}_2(\vec{r} \times \vec{p})\right) + V_6(\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) + \\ & + V_7\left((\vec{\sigma}_1\vec{r})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) + (\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{r})\right)(\vec{r}\vec{p}) \end{aligned} \quad (2.129)$$

ahol $V_i = V_i(r^2, p^2, L^2)$.

Ha feltesszük, hogy a potenciál \vec{p} -től csak az $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$ kombinációban függ, és bevezetjük a

$$\hat{S}_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1 \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \vec{r})}{r^2} - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \quad (2.130)$$

tenzorertőt, valamint a $\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 = 2\vec{S}$ vektort, akkor

$$\hat{V} = V_c + V_S(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + V_T \hat{S}_{12} + V_{LS}(\vec{L} \vec{S}) + V_Q(\vec{L} \vec{S})^2, \quad (2.131)$$

azaz a kísérleti tulajdonságok alapján felírt kétnukleon potenciál tartalmazta az összes, elméletileg megengedett tagot.

2.9. Egy bozon kicserélő potenciálok

Németh Judit fizikus jegyzet 2.8

3. fejezet

Atommagok

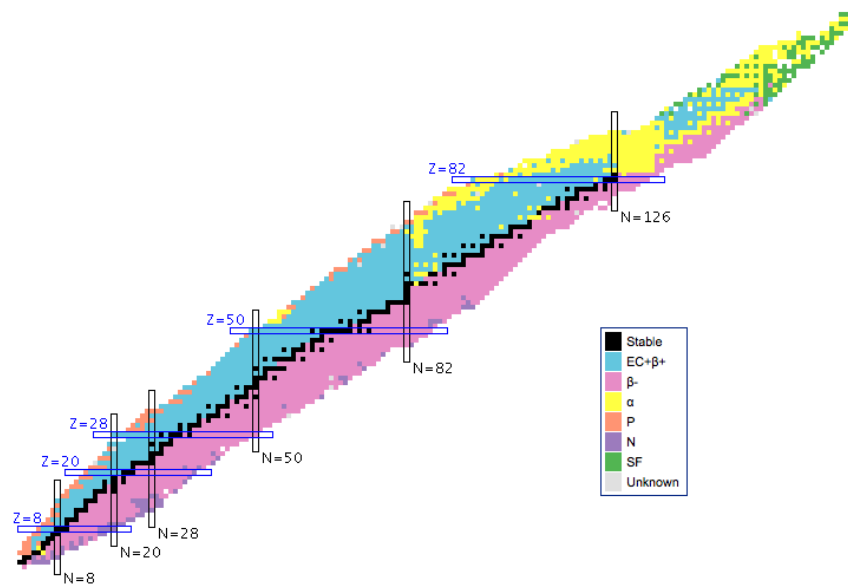
3.1. Atommagok tulajdonságai

Az atommagokat a hozzájuk tartozó kémiai elem jelével és tömegszámukkal azonosítjuk. Az ^{235}U például az urán $A=235$ részecskéből álló változatát jelenti, azaz benne $Z=92$ proton és $N=143$ neutron található. Időnként ezeket a (redundáns) számokat is megadják, pl. $^{235}_{92}\text{U}$ vagy $^{235}_{92}\text{U}_{143}$.

3.1.1. Csoportosítás

Az atommagokat a következőképpen csoportosíthatjuk:

- Izotópok: a Z töltés megegyezik, csak a tömegszám (és a neutronsám) különbözik. Az ^{235}U és ^{238}U pl. az urán két izotópja. Ezek az elemek kémiaailag gyakorlatilag azonosak, magfizikai szempontból azonban eltérő tulajdonságaik vannak.
- Izobárok: az $A=Z+N$ tömegszám egyezik meg, de mind a proton, mind a neutronsám különbözik. A $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ és $^{40}_{19}\text{K}_{21}$ például izobárok. Ezek az elemek kémiaailag különböző tulajdonságúak, de magfizikai szempontból hasonló szerkezetűek.
- Izotonok: az N neutronsám egyezik meg, mint például a $^{14}_6\text{C}_8$, $^{15}_7\text{N}_8$, $^{16}_8\text{O}_8$ esetében. Ezek az elemek kémiaailag különbözőek, de magfizikailag lehet bennül valami közös.



3.1. ábra. A periodusos rendszer ismert elemei. A sötét pontok a 286 stabil atommagot jelölik, az őket körülölelő kék és lila réteg a β bomló magokat. A vízszintes (Z töltés) és függőleges (N neutronszám) vonalak a mágikus számokat jelölik. Forrás: https://www.meta-synthesis.com/webbook/33_segre/seg_2.png

- Tükörmagok: ezek olyan izobárok, ahol a proton- és neutronszám fel van cserélve. Ilyen pl. a ${}^{14}_6\text{C}_8$ és ${}^{14}_8\text{O}_6$. Az ilyen párok a gyakorlatban csak a periodusos rendszer elején találhatók.
- Izomérek: „hosszú” élettartamú, gerjesztett állapotok. A hosszú a magfizikai időskálához, a 10^{-23}s -hez képest értendő, azaz $T_{1/2} \gtrsim 10^{-19} - 10^{-20}\text{s}$. A leghosszabban élő megfigyelt izomér a ${}^{113}_{48}\text{Cd}^*$, mely 5.1 év alatt bomlik el.

3.1.2. Stabilitás

A természetben 286 stabil (illetve közel stabil) atommagot ismerünk. A közel stabil azt jelenti, hogy felezési ideje nagyon nagy (ezt tipikusan $T_{1/2} \gtrsim 10^{15}$ évben határozzák meg), ami azt jelenti, hogy elméleti modellek alapján tudjuk, hogy bomlik az illető atommag, de kísérletileg ez nem, vagy csak nehezen és pontatlanul mérhető meg. A fenti időskála jóval nagyobb a Naprendszer 4.5 milliárd éves életkoránál, így az akkor keletkezett közel stabil elemek még alig bomlottak.

A stabil magok kezdetben a kis $Z \approx N$ vonal mentén helyezkednek el, míg nagy tömegszámok esetén a neutronok száma jóval meghaladja a protonokét, a periodusos rendszer vége felé akár 40%-al is. Ennek oka az elektromágneses Coulomb kölcsönhatás, mely a taszítás miatt megnöveli a protonok energiáját.

A stabil atommagokat körülölelik a viszonylag lassan (magfizikai értelemben!) bomló atommagok. A stabilitási vonaltól a Z tengely mentén haladva a β^+ , ellentétes irányban pedig a β^- bomló magok találhatók. Ezekből a magokban durván 1300 van.

A következő csoport a rövid ideig élő atommagokat öleli fel, melyek magreakciókban keletkeztek, és szerkezettel rendelkező állapotok (azaz $T_{1/2} \gtrsim 10^{-19} - 10^{-20}$ s). Ezekből eddig közel 2600-at térképeztek fel. Az elméleti modellek szerint összesen közel 6000 olyan atommag létezik, mely kellő ideig él ahhoz, hogy szerkezetéről beszélhessünk.

A felrajzolt atommagok bizonyos ún. mágikus számok körül nagyobb stabilitást mutatnak. Ennek megnyilvánulása a jobb felső sarokban levő kitüremkedés, a $Z = 126$ ismert, és az $N = 184$ várt mágikus értékek körüli „stabilitás-sziget” jele. A mágikus számok körül megnő a stabil izotópok száma. A természetben

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	49	50	51
N	3	1	3	0	5	1	3	1	3	1	3	1	5	1	1	6	1
Z	4	2	3	3	6	1	5	1	4	1	4	1	5	2	2	10	2

3.1. táblázat. Stabil izotópok száma adott neutron (második sor), illetve protonszám (harmadik sor) esetén.

megfigyelt mágikus számok mind párosak, és értékük 2,8,20,28,50,82,126. Az elméleti számolások a következő mágikus számnak a 184-et valószínűsítik. Az első három mágikus szám megegyezik az atomfizikai zárt héjak elektronszámaival ($2(2l + 1)$) héjanként, de utána jelentős eltérés tapasztalható. A kétszer mágikus magok, melyekben mind a proton, mind a neutronsám mágikus, különösen stabilak. A mágikus számok jelenléte héjszerkezetre utal, azaz, hogy a nukleonok megőrzik individualitásukat a magban. Ez a kölcsönhatás erőssége ismeretében, valamint annak tudatában, hogy az atomfizikával ellentétben a kölcsönhatás a két-részecske kölcsönhatásokból, és nem egy középponti potenciálban ered, meglepő.

Ugyancsak szembeűnő, hogy a természet a páros számú részecskét tartalmazó magokat részesíti előnyben, a hosszú élettartamú magok többsége páros-páros mag (bennük mind a proton, mind a neutronsám páros), egy kisebb része páros-páratlan (nem létezik például a természetben az $A = 5$ ps-ptl mag), csak és csak

4 db izotóp ($d=^2_1\text{H}$, ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$, $^{14}_7\text{N}$) található a periódusos rendszer elején, mely páratlan-páratlan.

3.1.3. Radioaktív izotópok

Mint az előző fejezetben láttuk az atommagok zöme nem stabil, hanem bomlik. 1898-ban E. Rutherford a magokból kijövő sugárzásokat három csoportra osztotta a külső mágneses térrel való kölcsönhatásuk során:

- α sugárzás, mely eltérült a mágneses térben. Ezek a α részecskék (^4_2He). Az α sugárzást a 6. részben tárgyaljuk a maghasadással együtt.
- β sugárzás, mely a mágneses térben az α sugárzással ellentétes irányba térül el. Ezek a gyenge kölcsönhatás következtében kilépő elektronok, és energiaeoszlásuk folytonos.
- γ sugárzás, mely nem térült el a mágneses térben. Ezek a mag alacsonyabb energiájú állapotba való átrendeződése során lépnek ki, és ennek következtében az energianívól energiakülönbségét viszik el (diszkrét energiájuk).

E sugárzások főbb jellemzői a következők:

- α bomlás: az atommagból egy α részecske (^4_2He) távozik, miközben a mag rendszáma 2-vel, tömegszáma 4-el csökken. Ez a bomlás a nagy magok esetében dominál. Mivel a tömegszám 4-el változik, ezért 4 család (sor) létezik:
 - $A = 4n$ (tórium) sor. Ez a $^{232}_{90}\text{Th}$ -al kezdődik, mely $1.4 \cdot 10^{10}$ év felezési idővel bomlik, és a $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ólommal ér véget. Az ólom 52.4% a természetben ez az izotóp. A Th nagy felezési ideje miatt ez az elem még fellelhető a Naprendszerben.
 - $A = 4n + 1$ (neptúnium) sor. Ez a $^{237}_{93}\text{Np}$ -al kezdődik, mely $2.2 \cdot 10^6$ év felezési idővel bomlik, és a $^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$ bizmuttal ér véget. Az bizmut 100% a természetben ez az izotóp. Az Np, a Naprendszer kialakulásához viszonyított nagyon gyors felezési ideje miatt ez az elem már gyakorlatilag nem fordul elő a Naprendszerben. Figyeljük meg, hogy a bizmut és a $4n$ sorban az ólom neutronszáma megegyezik, ez az előző fejezetben megismert 126-os mágikus szám, mely különleges stabilitást biztosít ezeknek az elemeknek.

- $A = 4n + 2$ (urán) sor. Ez a ${}^{238}_{92}\text{U}$ -al kezdődik, mely $4.5 \cdot 10^9$ év felezési idővel bomlik, és a ${}^{206}_{82}\text{Pb}_{124}$ ólommal ér véget. Az ólom 24.1% a természetben ez az izotóp.
- $A = 4n + 3$ (aktínium) sor. Ez a ${}^{235}_{92}\text{U}$ -al kezdődik, mely $0.7 \cdot 10^9$ év felezési idővel bomlik, és a ${}^{207}_{82}\text{Pb}_{125}$ ólommal ér véget. Az ólom 22.1% a természetben ez az izotóp. Az ${}^{235}\text{U}$ 6.5-el gyorsabban bomlik, mint az ${}^{238}\text{U}$, így az utóbbi dominál a természetes uránban.

A négy bomlássorból három ér véget a mágikus számú protonból (82) álló ólomban. A mágikus szám miatt ez az elem igen stabil, ezért nem bomlik tovább.

- β bomlás: az atommagból egy elektron lép ki (β^- bomlás), a tömegszám nem változik, a rendszám eggyel nő. Ilyen a ${}^3\text{H}$ (trícium) bomlása ${}^3\text{He}$ -á, melynek felezési ideje 12.3 év, maximális energiája pedig 18.6 keV. A másik fontos bomlás a ${}^{14}\text{C}$ bomlása 5730 éves felezési idővel és 156 keV-es maximális energiával ${}^{14}\text{N}$ -é. A β^+ bomlás esetén pozitron lép ki a magból, és változatlan tömegszám mellett a töltés eggyel csökken. Hasonló tulajdonságú az elektron befogás, amikor a mag befog egy kis impulzusmomentumú pályán levő elektront (K befogás).
- γ bomlás: Az atommag gerjesztett állapotából egy alacsonyabban fekvő energiaszintre kerül, és közben keV-MeV energiájú fotont bocsájt ki magából. A bomlás során sem a tömegszám, sem a töltés nem változik.

A természetben a radioaktív izotópoknak három fő forrása van:

- Hosszú felezési idejű izotópok: a Naprendszer kialakulásakor már jelen lévő izotópok, melyek a mai napig nem bomlottak el. Ezek táplálják a Föld geotermikus energiáját, a mélyben zajló bomlás hőjét termel. Képviselőik az α bomlásban ismertett sorokba tartozó elemek, valamint: ${}^{40}\text{K}$ (felezési idő: $1.28 \cdot 10^9$ év, a természetes kálium 0.012%-át teszi ki, megtalálható pl. a tengeri sóban, banánban), a ${}^{87}_{37}\text{Rb}$ ($4.7 \cdot 10^{10}$ év, 27.83%), a ${}^{113}\text{Cd}$ ($9 \cdot 10^{15}$ év, 12.3%), valamint a ${}^{115}\text{In}$ ($5 \cdot 10^{14}$ év, 95.7%).
- Folyamatosan keletkező izotópok: a magaslégkörben a kozmikus sugarak hatására folyamatosan keletkezik trícium a $p + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^3_1\text{H}$ reakcióval. Ugyancsak itt keletkezik a ${}^{14}\text{C}$ ${}^{14}\text{N}$ -ből. Ezeknek az izotópoknak az aránya a légkörben így közelítőleg állandó (csak a kozmikus sugárzás intenzitásától

függ), ezáltal az élő szervezetekbe hasonló arányban épül be, mint ahogy a légkörben megtalálható. Amikor a szervezet nem hat kölcsön többé a környezetével (nem folytat anyagcserét, pl. meghal), a ^{14}C már csak bomlik, és nem épül be. A mért $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arányból így meg lehet határozni, hogy mikor pusztult el az élő szervezet. Hasonlóképpen a ^3H beépül a vízbe, és a talajba jutva már csak bomlik. A $^3\text{H}/^1\text{H}$ arányból lehet megállapítani, hogy mennyi ideje esett le esőként a talajvíz, illetve nyomon lehet követni az óceáni áramlatokat.

- Emberi eredetű radioaktivitás: a nukleáris fegyverkísérletekkel, reaktorok által kibocsátott nemesgázok (xenon) által a környezetbe juttatott radioaktív izotópok. Ezek közül a leglényegesebb a két hasadási végtermék, a ^{137}Cs (cézium), mely 30.07 év felezési idővel, valamint a ^{90}Sr (stroncium), mely 28.78 év alatt bomlik. Ezek a radioaktív izotópok a természetes háttérsugárzás kb. 0.1%-ért felelősek. A stroncium ennek ellenére igen veszélyes, mivel kémiaiilag a kalciumhoz hasonlít, és így könnyen beépülhet a csontokba.

3.2. Atommagok tulajdonságai

3.2.1. Spin

A magok spinje a magban levő nukleonok spinjéből, illetve a nukleonok pályaimpulzusmomentumából tevődik össze. A spin mérésének legegyszerűbb módja a mag mágneses momentumának mérése. A kísérletek alapján a páros-páros magok spinje nulla, páratlan tömegszám esetén pedig a mag spinje egy nukleon teljes spinjének nagyságrendjébe esik, azaz a nukleon spinek a magban párosával kiejtik egymást, és az utolsó, párosítatlan nukleon határozza meg a mag spinjét.

A magok gerjesztésével elő lehet állítani magasabb spinű állapotokat is, azonban egy bizonyos küszöbérték fölött a mag instabillá válik, a centrifugális (és Coriolis) erő¹ felszakítja a nukleon párokat, és kilöki a legnagyobb impulzusú részecskéket. A tömegszám növekedtével ez a küszöb először növekszik (több nukleonra lehet „szétteríteni” az impulzusmomentumot), később azonban újra csökken, mivel a nagy magok esetleges deformációját a nagy impulzusmomentum felerősíti, és ez a mag hasadásához vezet. A maximális impulzusmomentum a $^{149}_{64}\text{Gd}$ magnál található, értéke $\sim 80 \hbar$.

¹A Coriolis erő az antiparallel beállású spineket egy irányba forgatja.

Vizsgálhatók az adott impulzusmomentumhoz tartozó állapotok energiái is. Kis spinek esetén ezek egy elég széles sávot alkotnak, mely a spin növekedtével szűkül, és a maximális spin $\sim 80 \hbar$ körül a sáv nulla szélességűvé válik. Az alsó határgörbét (az adott spinhez tartozó minimális energiagörbét) *yrast* vonalnak² hívjuk.

A magas spinű állapotok tanulmányozásával több érdekes jelenséget lehet megfigyelni:

- a „visszahajlás”: az impulzusmomentum növekedtével a mag szerkezete átrendeződik, és vannak olyan tartományok, ahol a tehetetlenségi nyomaték annyira megnő, hogy a gerjesztési energia növekedése ellenére a spin csökken. A belső szerkezet átrendeződése azért következik be, mivel a belső energianívók másképp változnak a mag forgásával, és így az impulzusmomentum növelésével szintkereszteződés jöhet létre: egy addig magasabb energiájú nívó alacsonyabb energiára kerül. Hasonló átrendeződés megfigyelhető a neutroncsillagokban is, ahogy a sugárzás következtében azok impulzusmomentuma csökken.
- az ellentétes spinirányítottságú nukleonpárok fokozatosan egy irányba állnak be (Coriolis erő).
- a szuperdeformált magok (ezekben a tengelyek aránya akár a 2:1, sőt 3:1 is lehet) stabilizálódnak (egy bizonyos küszöbenergiáig).

3.2.2. Mágneses dipól és elektromos kvadrupólmomentum

A magok tulajdonságairól sokat megtudhatunk, ha megvizsgáljuk külső elektromos, illetve mágneses térben való viselkedésüket. Ezeknek a tereknek a viselkedését jól ismerjük, így a mérésekből következtethetünk az atommagok belső tulajdonságaira.

Az kísérleti technikában az alkalmazható elektromágneses tér tipikus hosszskálája sokkal nagyobb, mint a magok mérete, így a következőkben a mag töltéseloszlásának \vec{R} súlypontja körül sorba fejtjük az elektromágneses tereket. A potenciális energia például

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{R} + \vec{r}) + \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{R} + \vec{r}) \quad (3.1)$$

²A szó skandináv eredetű, és „gyorsan-forgó”-t jelent.

alakú, ahol \vec{r} a töltéeloszlásának \vec{R} súlypontjától mért távolság, Φ az elektrosztatikus, \vec{A} pedig az elektromágneses vektorpotenciál. Mivel a mag ρ töltéeloszlása, és \vec{j} árameloszlása a potenciálok változásának léptékéhez képest igen kis tartományban különböznek nullától, ezért a potenciális energia a következő sorral közelíthető

$$\begin{aligned} U(\vec{R}) &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \left(\Phi(\vec{R}) + \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \left(\vec{A}(\vec{R}) + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x_i} x_i + \dots \right) \\ &= q\Phi(\vec{R}) - \vec{m}\vec{H}(\vec{R}) + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} q &= \int d^3r \rho(\vec{r}), & \vec{d} &= \int d^3r \rho(\vec{r})\vec{r} = 0 \\ \vec{m} &= \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}), & \vec{M} &= \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) = 0 \\ Q_{ij} &= \int d^3r \rho(\vec{r}) 3 x_i x_j \end{aligned} \quad (3.3)$$

és $E_j = \partial\Phi/\partial x_j$. Az elektromos dipól (\vec{d}) és a mágneses monopól (\vec{M}) töltéeloszlás szimmetrikus jellege miatt nulla. Forgásszimmetrikus rendszerben (és ez a jellemző), a kvadrupólmomentumnak két független eleme van, Q_{zz} és $Q_{xx} = Q_{yy}$. Mivel a külső térnek nincsen forrása a magon belül, fennáll a $\Delta\Phi = 0$ Poisson egyenlet, azaz $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$ ($\partial_x \partial_x \Phi = \Phi_{xx}$, és hasonlóan a többi komponensre), és forgásszimmetria esetén $\Phi_{xx} = \Phi_{yy}$. A kvadrupólmomentumhoz tartozó energia

$$E = \frac{1}{6} \left((Q_{xx} + Q_{yy}) \left(-\frac{1}{2}\Phi_{zz}\right) + Q_{zz}\Phi_{zz} \right) = \frac{1}{2} (3Q_{zz} - Q_{rr}) \frac{1}{2}\Phi_{zz} \quad (3.4)$$

ahol $Q_{rr} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$, és a kvadrupólmomentum egy számmal, a

$$Q = 3Q_{zz} - Q_{rr} = \int d^3r \rho(\vec{r}) (3z^2 - r^2) \quad (3.5)$$

mennyiséggel jellemezhető, dimenziója távolságnégyzet, és a hatáskeresztmetszet egységeiben, barn-ban mérjük.

prolate (szivar, $Q > 0$) – oblate (diszkosz ($Q < 0$))

A mágneses dipólmomentum a spinhez hasonlóan viselkedik: páros-páros magokra nulla, páratlan magokra kicsi, a nukleon nagyságrendjébe esik. A komponensekből álló rendszer mágneses momentuma

$$\vec{M} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left(g_i^l \vec{l}_i + g_i^s \vec{s}_i \right) \quad (3.6)$$

ahol $g_i^l = 1$ protonra és nulla neutronra, $g_i^s = \mu_p$ protonra és μ_n neutronra. A mágneses momentum az \vec{M} z komponense az impulzusmomentum maximális vetülete esetén,

$$\mu = \frac{1}{\mu_N} \langle M_z \rangle = \frac{1}{\mu_N} \frac{\langle J_z \rangle \langle \vec{J} \vec{M} \rangle}{\langle \vec{J}^2 \rangle} \rightarrow \frac{1}{\mu_N} \frac{1}{J+1} \langle \vec{J} \vec{M} \rangle. \quad (3.7)$$

Itt felhasználtuk, hogy a teljes impulzusmomentum \vec{J} megmaradó kvantumszám, de a \vec{M} mágneses momentum nem, így ennek z irányú vetületének várható értékét úgy kapjuk, hogy vesszük a mágneses momentum vetületét a teljes impulzusmomentumra, és a maximális vetületű állapotban $\langle J_z \rangle = J$. Páros-páros magok esetén $J = 0$, így a mágneses momentum is nulla.

3.3. Tömeg, kötési energia

A tömeg mérésére az atomi tömegegységet (AMU: atomic mass unit) használjuk,

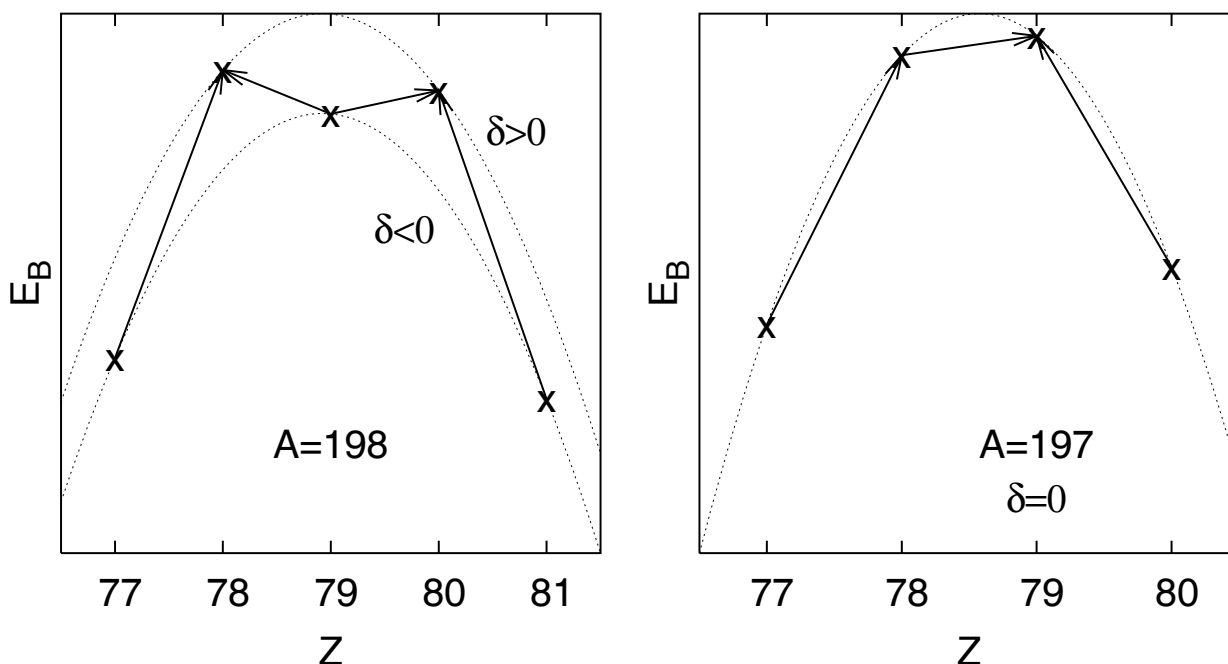
$$AMU = \frac{M_{12C}}{12}, \quad (3.8)$$

mely a szén 12 tömegszámú izotópjának *atomsúlya*, azaz az elektronok tömegét és beleértve. A magfizikai táblázatokban a tömegeket a Z rendszámú és A tömegszámú atom $M(Z, A)$ tömegének, valamint az AMU A -szorosának különbségeként adják meg, azaz a kötési energia

$$E_B = (A \text{ AMU} - M_A) c^2 \text{ (keV)}. \quad (3.9)$$

Vegyük észre, hogy ehhez a képletben semleges atomok esetén az elektron tömege nem ad járulékot. A kötési energia empirikusan jól illeszthető a Weizsäcker formulával,

$$E_B(A, Z) \approx c_1 A - c_2 A^{2/3} - c_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - c_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{\delta}{A^{3/4}}. \quad (3.10)$$



3.2. ábra. Mag kötési energiájának maximuma páros tömegszám (bal oldali ábra), illetve páratlan tömegszám esetén (jobb oldali ábra). A pontozott vonalak jelzik a Weizsäcker kötési formula által definiált görbéket páros-páros, páratlan-páratlan, illetve páros-páratlan magokra. A bal oldali ábrán, bár a $Z = 78$ mag energiája mélyebb, a $Z = 80$ -as mag csak az alacsonyabb kötési energiájú $Z = 79$ magon át tudna kétszeri β bomlással átalakulni, ezért stabil marad.

A formula egyes tagjainak szemléletes jelentése van (ezért gyakran félempírikus formulának is nevezik: az alakját a folyadékcsepp modell alapján lehet sejteni, a c_i együtthatók értékét azonban kísérletileg mérik). Az első tag a magok telítettségére utal: az egy részecskére jutó energia első közelítésben független a mag méretétől, minden részecske $c_1 \approx -16$ MeV átlagos kötési energiával rendelkezik. Ezt a képet módosítja a többi tag. A második rész feleltethető meg a „felületi” energiának (ennek szerepe a tömegszámmal csökken), a harmadik a Coulomb energiának (melynek szerepe a rendszámmal növekszik), a negyedik a szimmetria energiának (a természet nem kedveli a túlságosan nagy proton- és neutronszám különbséget). Az utolsó tag egy teljesen kísérleti effektus, mely nem következik a cseppmodellből: a megfigyelés szerint a páros-páros magokra (ahol

mind a proton-, mind a neutronsám páros) a kötési energia erősebb, mint amit az első négy tag adna (pozitív előjel), páros-páratlan magokra megegyezik ($\delta = 0$), és páratlan-páratlan magokra gyengébb (negatív előjel). Az $A^{-3/4}$ függés teljes egészében kísérleti tapasztalatokra épül.

A (3.10) formula ismeretében könnyen kiszámolhatjuk a legmélyebb energiájú maghoz tartozó rendszámot, ha a tömegszámot lerögzítjük,

$$\left. \frac{\partial E_B(A, Z)}{\partial Z} \right|_A = 0. \quad (3.11)$$

Mivel az energia függ a magban levő protonok és neutronok páros illetve páratlan mivoltától, páros tömegszámra kétféle energiakifejezésünk van: a páros-páros (pozitív δ) illetve a páratlan-páratlan (negatív δ) magra vonatkozó, azaz általánosságban két minimumunk lehet. Páratlan tömegszámra azonban csak páros-páratlan mag lehet (azaz a $\delta = 0$ esetet kell tanulmányozni), így egy görbének csak általában csak egy minimuma van, egy stabil izotóppal (ha kettő van, akkor az egyikük nagyon nagy felezési idővel bomlik).

3.4. Mágikus számok, kvadrupólmomentum

A kötési energia tanulmányozása során a (3.10) formulától még további szisztematikus eltéréseket találunk, bizonyos kitéüntetett neutron illetve protonszámok, a mágikus számok körül, ahol az energia mélyebb (kb. 0.1 MeV/nukleonnal), mint azt a formulából várnánk. A kötési energiában érdekes módon van egy minimum a 14-es, egyébként nem mágikus szám körül is.

A mágikus számoknál a magok elektromos kvadrupólmomentuma nulla, azaz a mag gömbszimmetrius, ami tovább erősíti azt a feltételezést, hogy ezek a számok lezárt héjaknak feleltethetők meg. A mágikus számoktól távolodva a kvadrupólmomentum nagyobb értékeket vehet fel. Viszont a 3.1 ábráról látható, hogy a stabil magok a $20 \lesssim Z \lesssim 60$ tartományban „elkerülik” a mágikus számoktól távoli tartományokat, és így nem is túlságosan deformáltak. Ezzel szemben a mágikus számoktól távoli ^{12}C , ^{24}Mg , vagy a $50 \lesssim Z \lesssim 82$ ritka földfémek, illetve az igen nehéz magok deformáltak.

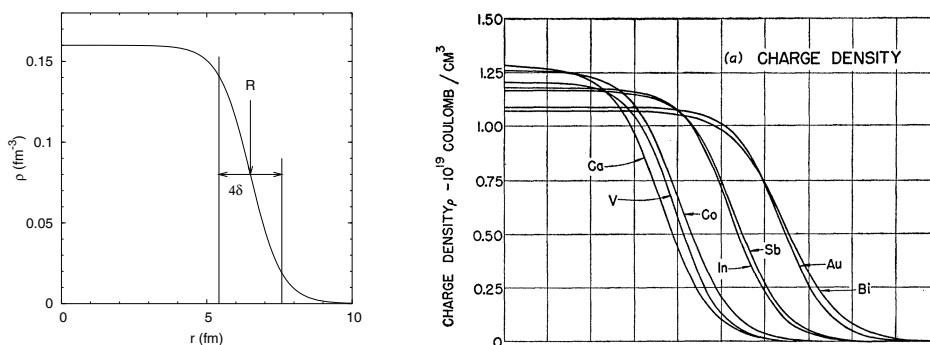
3.5. Méret, sűrűségeloszlás

A mag elektronokkal, protonokkal és neutronokkal végzett szórás kísérletei alapján a 2.1.6 fejezetben ismertetett módon meghatározható a mag töltés-, illetve

neutronszórás alapján a (nukleon) sűrűség eloszlása. A tapasztalat alapján a nagy magok sűrűségprofilja igen jól közelíthető lépcsőfüggvénnyel, a mag sugaráig, mely jó közelítéssel

$$R_A = r_0 A^{1/3} \quad (3.12)$$

$r_0 \sim 1.07 - 1.25$ fm, a sűrűség értéke $\rho_0 \approx 0.16$ fm⁻³, független a mag tömegszámától. Ez a telítettség egyik jele, a folyadékcsepphez hasonlóan a mag sűrűsége nem változik újabb nukleon hozzáadásával.



3.3. ábra. Bal oldal: Egy nehéz mag (arany) közelítő sűrűségeloszlása (3.13) Saxon-Woods paraméterezésben. Jobb oldal: A Rutherford szórással (ld. 2.3. jobb ábra) kimért töltéseloszlás különböző magokban. Forrás: B. Hahn, D. G. Ravenhall, and R. Hofstadter, Phys. Rev. **101**, 1131-1142 (1956).

A sűrűséget az ún. Saxon-Woods paraméterezés írja le pontosabban,

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\delta}}}, \quad (3.13)$$

ahol R a mag sugara, δ pedig az eloszlás levágásának szélessége. Könnyebb magokra (kb. a Ca atommagig) a Gauss eloszlás áll közelebb a kísérleti mérésekhez. A töltéseloszlás hasonlít a sűrűségeloszlásához, kis módosításokkal: nagy magoknál a Coulomb taszítás kiszorítja a protonok egy részét a középpontból, így ott lecsökkent a nukleon sűrűségeloszláshoz képest a protonok száma, és egy kicsit kijebb dúsul fel. A neutronszám és protonszám különbsége is okoz eltérést, nagy magoknál a neutroneloszlás kb. 0.2 fm-rel hosszabban nyúlik el, mind a protonok eloszlása.

Egy érdekes jelenség a *neutron halo*, könnyű magokban a néhány extra neutron jelentősen kiszorul a protonokat is tartalmazó tartományból, és így gyengén lesznek kötve. Ennek eredménye, hogy a deuteronhoz hasonlóan igen nagy távolságra „kinyúlnak” a magon kívülre, és a szórásokból mérhető átlagos $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ sugár elérheti a nagy magok sugarát is. Speciálisan a ^{11}Li sugara közel megegyezik a ^{208}Pb sugarával!

3.6. Izobár analóg állapotok

Mint említettük, az izospin szimmetria megmarad erős kölcsönhatásban, ezért azt várjuk, hogy az izobár magok hasonló szerkezetűek. Ennek illusztrálására a 3.4 ábrán bemutatjuk 3 könnyű izobár alacsonyban fekvő energianívóit.

A ^{10}Be és ^{10}C magokban az izospin harmadik komponense ± 1 , ezért az izospinjük $T \geq 1$, a ^{10}B magra azonban $T_3 = 0$, így az energiaszintekben van $T = 0$ állapot is, azonban a $T = 1$ állapotok ugyanott helyezkednek el mint a ^{10}Be és ^{10}C magokban. Nagyobb magok esetén hasonló a helyzet, de ott a Coulomb kölcsönhatás a protonszám növekedésével egyre jobban eltolja az energiaszinteket.

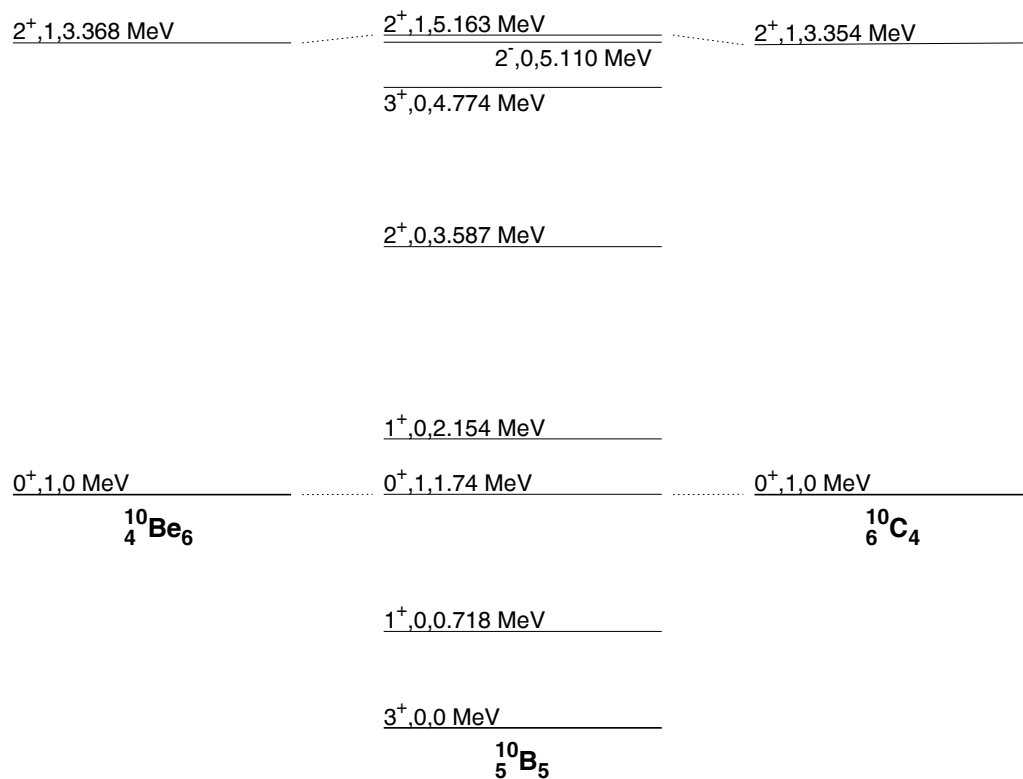
3.7. Energianívók

A gerjesztési energia növekedésével az energianívók száma rohamosan növekszik, és egy idő után olyan sűrűn helyezkednek el, hogy a kísérleti technikával nem is lehet felbontani őket. Ilyenkor célszerű az energianívók statisztikus tulajdonságait vizsgálni. A tapasztalat szerint a nívók sűrűsége exponenciálisan növekszik az energiával és a spinnel,

$$\rho(E, J) = \rho(0, 0) (2J + 1) e^{2\sqrt{aE}} e^{-\frac{J(J+1)}{2\sigma^2}}. \quad (3.14)$$

A képletben szereplő a paraméter a nívósűrűség, és értéke kb.

$$a \approx \frac{A}{10}. \quad (3.15)$$



3.4. ábra. Izobár magok alacsonyan fekvő energianívói. Az azonos izospinű állapotok energiaszerkezete a Coulomb kölcsönhatástól eltekintve azonos. Az energianívókon a spint és paritást, valamint az izospint és az alapállapothoz képesti energiát jelöljük.

4. fejezet

Magmodellek

Az atommagok különleges stabilitása a mágikus számok körül, valamint az, hogy a magmomentumok az utolsó, párosítatlan nukleon momentumát hordozzák, arra utal, hogy a nukleonok a magon belül megtartják individualitásukat, határozott kvantumszámokkal rendelkeznek, és nem „olvadnak fel” a magon belül. Ez első pillanatra, az erős kölcsönhatás erősségének ismeretében meglepő, és magyarázatra szorul.

Ugyanakkor az atommagok egy részecskére jutó energiájának és a magok sugárának tanulmányozásából azt látjuk, hogy az atommagok *telítettek*, azaz az egy részecskére jutó kötési energia és a sűrűség is a tömegszám növekedtével hamar eléri telítési értékét, és gyakorlatilag azonos a magok nagy részére. Ez a tulajdonság vezetett az atommag folyadékcsepp modelljéhez, melynek jellegzetessége, hogy újabb folyadékrészecskék hozzáadásával sűrűsége nem változik.

Ennek alapján két megközelítés alakult ki az alapállapotú (vagy ahhoz közeli) magok leírására:

- kollektív modellek,
- egyrészecske modellek.

A modellek döntő többsége egyrészecske modell, azaz az atommagot egymással gyengén kölcsönható, független részecskékből álló rendszerként írja le. Az ilyen modellekben meg kell vizsgálni, hogy

- képesek-e megmagyarázni a magok telítettségi tulajdonságait,
- miért, és milyen feltételek esetén alkalmazhatóak egy egyébként erős kölcsönhatás esetén.

4.1. Kollektív modellek

A kollektív modellek a mag globális tulajdonságait írják le, például a kötési energia menetét, a forgási, illetve vibrációs spektrumot, a hasadás folyamatát, és egymagukban nem alkalmassak az egyedi nukleonpálya effektusok értelmezésére, így a páros magok nagyobb stabilitásának, vagy a mágikus számoknak a leírására.

4.1.1. A cseppmodel

A cseppmodel a magot egy folyadékcsepphez hasonlítja. Ahogy a folyadékcsepp is összenyomhatatlan, a mag sűrűsége sem függ a mag méretétől. A cseppet a nukleonok által keltett átlagpotenciál tartja össze, a felületen levő nukleonok ennek csak egy részét érzik, ezt a felületi feszültségen keresztül vesszük figyelembe. A mag energiakifejezése hasonló a félempírikus formulához a párkölcsönhatás nélkül:

$$E = -c_1 A + c_2 A^{2/3} + c_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + c_4 \frac{(N - Z)^2}{A} + c_5 \frac{(N - Z)^2}{A^{4/3}} \quad (4.1)$$

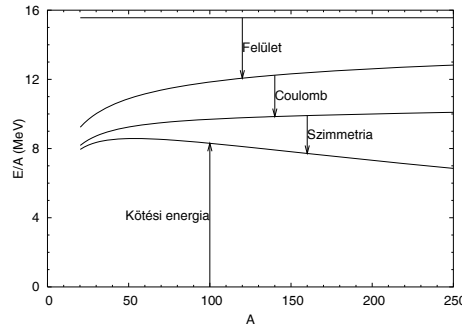
Az első tag írja le az általános vonzó átlagpotenciált, a második a felületi feszültséget. A felület deformálása csökkenti a kötési energiát, és ezáltal stabilizálja a felületet: az esetleges kidudorodások hamar visszafejlődnek. A következő tag a protonok Coulomb energiáját veszi figyelembe, nagyságrendje egyszerűen megbecsülhető annak feltételezésével, hogy a magban a Z proton egyenletesen helyezkedik el egy $r_0 A^{1/3}$ sugarú gömbben,

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} = \frac{3e^2}{5r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \equiv c_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad c_3 = \frac{3 \cdot 1.41 \text{ MeV fm}}{5 \cdot 1.15 \text{ fm}} = 0.73 \text{ MeV}. \quad (4.2)$$

Mint látjuk, ez az érték igen közel van a kísérletekből kiolvasható értékhez. A negyedik tag a szimmetriaenergiát képviseli, illetve annak felületi korrekcióját, és pusztán azt veszi figyelembe, hogy a β kölcsönhatás miatt a protonok és neutronok száma között egyensúly alakul ki, amelytől való eltérés energiába kerül. Az utolsó tagot sokszor el is hagyják a szakirodaomban. A stabil magok ismert kötési energiája alapján a c együtthatók illeszthetők. Egy lehetséges illesztés a következő értékeket adja,

c_1	c_2	c_3	c_4
15.56	17.23	0.7	23.3

4.1. táblázat: A folyadékcsepp model paraméterei MeV egységekben.



4.1. ábra. A különböző energiagatagok járuléka a kötési energiához.

A különböző energiagatagok járulékat a 4.1 ábra illusztrálja: a felületi energia szerepe csökken, a Coulomb és szimmetria energia szerepe növekszik a tömegszám növekedésével. Nagy magok esetén a Coulomb energia instabilizálja a magot: a protonoknak célszerű kisebb csoportokba (például kettőbe) rendeződni. Amikor a Coulomb energia változása meghaladja egy deformáció során a felületi energia változását, akkor lép fel a spontán hasadás, a mag kettéhasad két kisebb maradékmagra.

A (4.1) formula lehetőséget ad a spontán hasadás feltételének kiszámolására (ennek részleteibe itt nem megyünk bele, az $l = 2$ módusra vonatkozó számolást a 6.1 fejezetben mutatjuk meg). Másik hasznos tulajdonsága, hogy adott tömegszám mellett megkereshetjük vele a legjobban kötött magot, ahol kötési energia rendszám szerinti deriváltja eltűnik. Az erre vonatkozó közelítő képlet

$$Z_{\text{stabil}} = \frac{A/2}{1 + 0.0075 A^{2/3}}. \quad (4.3)$$

4.1.2. Forgási módusok

Általában a merev test forgási energiáját a

$$E_f = \frac{L^2}{2\Theta} \quad (4.4)$$

összefüggés írja le, ahol L az forgás impulzusmomentuma, Θ pedig a test tehetlenségi nyomatéka. Mivel a kvantummechanikában az impulzusmomentum kvantált, egy merev test lehetséges energiszintjei az

$$E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\Theta}. \quad (4.5)$$

Adott spin (impulzusmomentum) esetén ez az összefüggés egy parabolikus profilt határoz meg a magok legalacsonyabb energiaszintjeire, ami minőségileg jól leírja a kísérletileg kimért *y_{rast}* vonalat.

A modellt finomíthatjuk azzal, hogy a folyadékcsepp nem tekinthető ideális merev testnek, és a forgás növekedtével a centrifugális erő kinyomja a nukleonok a mag széle felé, ezáltal növelve a tehetetlenségi nyomatékot. Az impulzusmomentum szerinti sorfejtésben az energiaszintek közelítő képlete a

$$E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\Theta} [1 - \alpha J(J+1)] \quad (4.6)$$

összefüggésre módosul, ahol α egy, kísérletileg meghatározható (kis) szám. Drasztikusabb esetben a mag szerkezete átrendeződhet, a tehetetlenségi nyomaték hirtelen növekedését eredményezve, ez az oka a már említett *backbending* jelenségnek.

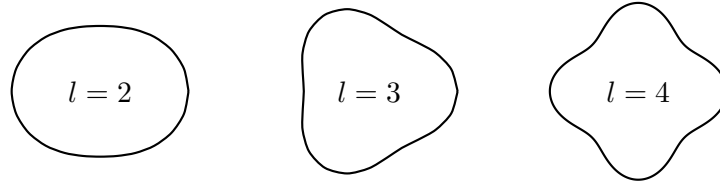
4.1.3. Rezgő módusok

Az atommagok egy másik lehetséges kollektív gerjesztési módusa a felület vibrációjából adódik. A felület gerjesztés hatására deformálódhat, és ez a deformáció rezeghet. A felület legáltalánosabb deformációját a gömbfüggvények szerinti sorfejtéssel írhatjuk fel,

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm}(t) Y_l^m(\theta, \phi) \right). \quad (4.7)$$

Az $l = 0$ módus a radiális rezgéseket írja le, és ez összenyomhatatlan folyadék esetén a tömegmegmaradás miatt nem valósulhat meg. Az $l = 1$ eset a folyadékcsepp translációját írja le, és a tömegközéppont megmaradása miatt ez a módus sem valósul meg. A legalacsonyabb rezgési módus a kvadrupól, $l = 2$. A rezgés során a felületi feszültség (és a Coulomb erő) hatására a deformáció visszahúzódik, de az energiamegmaradás miatt továbblendül, és ellenkező irányú deformációba vált át, azaz a deformációt leíró α paraméter időben változik. A legegyszerűbb közelítésben az energiakifejezés sorbafejtető az egyensúlyi helyzet körül, és az α paraméterekben négyzetes kifejezést kapunk, egy kinetikus, és egy potenciális részt,

$$H \approx \frac{1}{2} \sum_{lm} B_{lm} \dot{\alpha}_{lm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{lm} C_{lm} \alpha_{lm}^2, \quad (4.8)$$



4.2. ábra. Néhány tipikus magdeformáció a (4.7) gömbhullámkifejtés $l = 2, 3, 4$ rendjeiben.

ahol B_{lm} és C_{lm} a sorfejtés során fellépő tagok, melyek az energiakifejezésből meghatározhatóak (a pontos számolás hasonlít a spontán hasadási küszöb meghatározásához, és itt nem tárgyaljuk). A felírt Hamilton függvény általában nem függ az m kvantumszámtól, és az l kvantumszámban független oszcillátorok rendszerének tekinthető. Ebből az adott l multipólhoz tartozó gerjesztések azonnal meghatározhatók, és azok a

$$E_{n,l}^r = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l \quad (4.9)$$

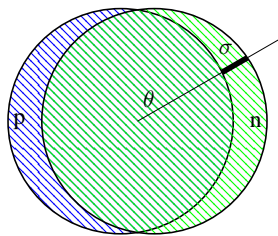
harmonikus oszcillátor energiszintjeinek felelnek meg, ahol $\omega_l^2 = C_l/B_l$.

Az előbb említettük, hogy az $l = 0$ és $l = 1$ módusok nem valósulnak meg egy folyadékseppben. Azonban a mag négy fajta „folyadékából” áll (proton és neutron, mindegyik két spinbeállással), és lehetséges olyan módusok, ahol azok páronként ellenkező irányba mozognak, ezáltal biztosítva a tömeg-, illetve tömegközéppont megmaradását. Amikor a neutronok és a protonok azonos fázisban mozognak, izoskalár, amikor ellentétes fázisban, izovektor módusról beszélünk. Az egyik első felfedezett módus az óriás dipól rezonancia volt, amikor a külső elektromágneses tér frekvenciájának függvényében a rezgésnek megfelelő frekvenciánál igen nagy elnyelést tapasztaltak. Azóta találtak ilyen „óriás” monopól rezonanciákat is.

Az óriás dipól rezonancia energiájának tömegszámfüggését könnyen kiszámolhatjuk. A 4.1.3 ábra alapján a (4.7) kifejtésben csak az $l = 1$ ($m = 0$) tagot tartjuk meg, és a két felület elcsúszása

$$\sigma(\theta, \phi) = \alpha_{10} \sin \theta \sin \phi. \quad (4.10)$$

Az egyensúlyi helyzet körül a potenciál a (4.7)-nek megfelelően négyzetes a de-



4.3. ábra. Óriás dipól rezonancia: a protonok és a neutronok ellenkező irányba mozogva rezegnek a közös tömegpont körül. σ jelöli a „neutronbőr” vastagságát.

formációban, így a potenciális energia

$$C_{10}\alpha_{10}^2 \sim \int d\Omega R^2 \sigma^2 \sim R^2 \alpha_{10}^2 \sim A^{2/3} \alpha_{10}^2. \quad (4.11)$$

A (4.7) (első) kinetikus tagja pedig a proton-neutron rendszer redukált tömege lesz, azaz $B_{10} \sim A$. Rezgő mozgás esetén

$$\alpha_{10}(t) = \alpha_{10}(0) e^{i\omega t}, \quad \dot{\alpha}_{10}^2 = -\omega^2 \alpha_{10}^2, \quad (4.12)$$

és a teljes energia nem változik a mozgás során. Innen kapjuk, hogy

$$E_{\text{dipol}} = \hbar\omega \sim \sqrt{\frac{A^{2/3}}{A}} = A^{-1/6}. \quad (4.13)$$

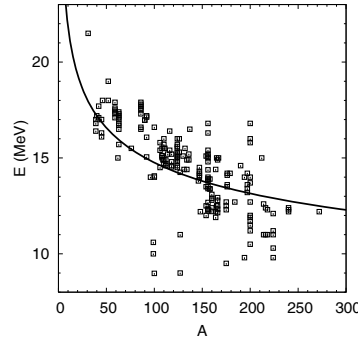
Ezt először Goldhaber és Teller vezette le 1948-ban. Az elméleti modellekből kiszámolható az arányossági tényező is, és a 4.4 ábrán látható, hogy a kísérleti méréseket elég jó egyezésben vannak az elmélettel.

4.2. Egyrészcse modellek

Az egyrészcse modellek azt az elképzelést tükrözik, hogy a nukleonok megtartják kvantumszámaikat a magokon belül, és a többi nukleon által keltett *átlagtérben* mozognak.

4.2.1. Fermi gáz modell

A magok Fermi gáz modelle a a két alapfeltevést tesz a magok leírására:



4.4. ábra. Az óriás dipól rezonancia energiájának tömegszámfüggése. A pontok a kísérleti mérések, a vastag vonal az elméleti számolás az $A^{-1/6}$ függéssel.

- A nukleonok a magon belül egymástól függetlenül mozognak egy V térfogaton belül.
- A nukleongáz a Fermi statisztikát követi (feles spinű részecskék).

Fermi rendszerekben az elemi fáziscella mérete h^3 és benne g állapot lehetséges, ahol g a degeneráció. $1/2$ spin esetén $g = 2$ a két spinbeállásnak megfelelően. Ha a protonok és a neutronokat egy részecskének (nukleon) gondoljuk, akkor a spinen kívül két izospin beállítás is lehetséges, és $g = 4$. Az energiaszintek eloszlását a Fermi-Dirac eloszlásfüggvény írja le, mely az állapotok sűrűségét adja meg az impulzus, a hőmérséklet és a kémiai potenciál függvényében,

$$f(p, T, \mu) = \frac{g}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E(p)-\mu}{T}} + 1}, \quad (4.14)$$

ahol $E(p)$ az adott impulzushoz tartozó energiát adja meg. Nemrelativisztikus esetben ez

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_0, \quad (4.15)$$

ahol V_0 a részecske által érzett potenciál (az egyszerűség kedvéért helytől függetlennek tételezve fel). Az összes állapotok száma

$$N = \frac{g}{h^3} \int \frac{d^3p d^3r}{e^{\frac{E(p)-\mu}{T}} + 1} = \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dE E^{1/2} \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}, \quad (4.16)$$

ahol az egyszerűség kedvéért a $V_0 = 0$ választással éltünk (a legalacsonyabb szint energiáját nullának választottuk). Zérus hőmérsékleten a Fermi-Dirac eloszlás egy lépcsőfüggvényt eredményez, mely az $E = \mu$ értéknél levág, és az integrál könnyen elvégezhető. Mivel minden állapothoz egy részecske tartozik, ezért a térfogattal leosztva a jobb oldalon a sűrűséget kapjuk,

$$\varrho = \frac{g}{6\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2} \quad (4.17)$$

amiből a kémia potenciál (Fermi energia),

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 \varrho}{g} \right)^{2/3} \approx 20.7 \text{ MeV fm}^2 \left(\frac{6\pi^2 0.138 \text{ fm}^{-3}}{g} \right)^{2/3} \approx 33 \text{ MeV} \quad (4.18)$$

azaz a legutolsó betöltött állapot ezen az energiaszinten helyezkedik el. Itt a mag $\varrho = A/V$ ($V = 4\pi/3 r_0^3 A$, $r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$) átlagsűrűségét helyettesítettük be.

Külön számolva a protonokat és neutronokat ($g = 2$),

$$\mu_p = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \varrho_p)^{2/3}, \quad \mu_n = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \varrho_n)^{2/3}. \quad (4.19)$$

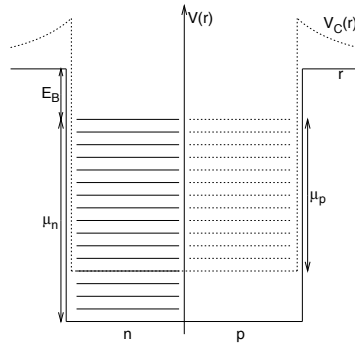
Nehéz magokra $Z/A \approx 1/2.2$, $N/A \approx 1/1.8$, így a két kémiai potenciál eltér egymástól, $\mu_p \approx 31 \text{ MeV}$ és $\mu_n \approx 35 \text{ MeV}$. Mivel a legfelső energiszinteknek meg kell egyeznie (különben β bomlással kiegyenlítődnének), ezért nehéz magokban a potenciál mélyebb a neutronokra, mint a protonokra, és ez a különbség a Coulomb kölcsönhatásnak tulajdonítható.

A kémiai potenciálból meghatározható a legmagasabb szinten levő nukleon impulzusa, $p_{\max} = \sqrt{2m\mu} \approx 250 \text{ MeV}$, amiből a részecskék sebessége $v \approx 0.25 c$. Ennél a sebességnél még igen jó közelítéssel használható a nemrelativisztikus leírás.

Energia

A Fermi rendszer energiája a (4.16) sűrűséghez hasonlóan számolható, csak az integrandust meg kell szorozni az adott állapot energiájával. Nulla hőmérsékleten

$$E = \frac{gV}{10\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} = \frac{\hbar^2}{2m} V \frac{g}{10\pi^2} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{5/3} \varrho^{5/3} =: C A. \quad (4.20)$$



4.5. ábra. Proton és neutron nívók elhelyezkedése a mag potenciálterében. A folytonos vonal jelöli a neutron, míg a szaggatott a proton potenciált.

Kihasználva a magok telítettségét (a sűrűség nem függ a tömegszámtól – ezt a Fermi gáz modell önmagában nem tudja!) ez a kinetikus energiát leíró tag arányos a részecskék számával. Ismét, külön számolva protonokra és neutronokra,

$$E = 2^{2/3} C A \left[\left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{N}{A} \right)^{5/3} \right], \quad (4.21)$$

ahol a $2^{2/3}$ faktor a degeneráció változása miatt lép fel. Bevezetve az

$$x = \frac{N - Z}{A}, \quad Z = \frac{A}{2} (1 - x), \quad N = \frac{A}{2} (1 + x) \quad (4.22)$$

jelölést, és sorbafejtve másodrendig x szerint kapjuk, hogy

$$E = C A \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 + \dots \right]. \quad (4.23)$$

Az első tag arányos a tömegszámmal, és a térfogati energia kinetikus részét képviseli, míg a második tag a szimmetria taghoz ad járulékot. Mivel ezek a tagok mind pozitívak, a protonok és neutronok számának eltérése növeli az energiát.

Energianívók

Az energianívók sűrűségének meghatározására vizsgáljuk meg az energiát véges hőmérsékleten,

$$E = \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dE E^{3/2} \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}. \quad (4.24)$$

Alacsony hőmérsékletek ($\mu \gg T$) esetén a Fermi-Dirac eloszlásfüggvényt tartalmazó integrálokra alkalmazható a *Bethe-Sommerfeld kifejtés*,

$$\int_0^\infty \frac{f(E) dE}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1} \approx \int_0^\mu dE f(E) + \frac{\pi^2}{6} T^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} T^4 f'''(\mu) + \dots \quad (4.25)$$

Ennek megfelelően a (4.24) energiakifejtés alacsony hőmérsékleten az

$$E \approx C A \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{T}{\mu} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.26)$$

képlettel közelíthető, ahol a C számot a (4.20)-ban definiáltuk. A gerjesztési energia

$$E^* = E(T) - E(0) \approx C A \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{T}{\mu} \right)^2. \quad (4.27)$$

Külön figyelembe véve a protonok és neutronok járulékát,

$$E^* = 2^{2/3} C \frac{\pi^2}{4} T^2 \left[\frac{Z}{\mu_p^2} + \frac{N}{\mu_n^2} \right], \quad (4.28)$$

és behelyettesítve a nehéz magokra ($Z \approx A/2.2$, $N \approx A/1.8$) az előbb kiszámolt $\mu_p \approx 31$ MeV és $\mu_n \approx 35$ MeV, $C \approx 20$ MeV értékeket, kapjuk, hogy

$$E^* \approx \frac{A}{14} T^2, \quad (4.29)$$

ahol mind az energia, mind a hőmérséklet MeV egységekben van kifejezve. Egy nehéz mag, pl. a $^{180}_{73}\text{Ta}$ esetében egy 8 MeV-es gerjesztéshez ennek alapján kb. 0.8 MeV hőmérséklet tartozik, ami jóval kisebb, mint a kémiai potenciál (≈ 30 MeV) értéke, azaz a Bethe-Sommerfeld sorfejtés jogos ebben az esetben.

A gerjesztési energia hőmérsékletfüggéséből ki tudjuk fejezni a rendszer entrópiáját,

$$S(T) = \int_0^T \frac{dE}{T'} = \frac{A}{7} T = \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{A E} \quad (4.30)$$

ahol kihasználtuk, hogy $dE = A/7 T dT$ és az alapállapot entrópiája zérus. Mivel az entrópia az állapotok számára utal,

$$\varrho(E) = \varrho(E=0) e^S, \quad (4.31)$$

ahol $\rho(E)$ az E energia körüli állapotsűrűség, a (3.14) egyenlet alapján a Fermi gáz modellben a nívósűrűség értéke

$$a = \frac{A}{14}, \quad (4.32)$$

ami megközelítőleg helyesen írja le a kísérletileg megfigyelt $A/10$ értéket. A nívósűrűség ekkora értéke igen nagy, a magfizikai energiatartományban a nívók száma igen magas! Például a ${}^{60}_{27}\text{Co}$ esetén a 8 MeV gerjesztési energia körül az állapotsűrűség 10^5 MeV-enként.

4.2.2. Harmonikus potenciál

A Fermi gáz modell minőségileg helyesen írja le a magok bizonyos tulajdonságait, de a részecskék a szabad síkhullámokon vannak kifejtve benne. Ezért a valósághoz közelebbinek érezhetünk egy olyan modellt, mely figyelembe veszi a mag véges kiterjedését. A legegyszerűbb potenciál, mely könnyen vizsgálható, a harmonikus oszcillátor potenciál,

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2. \quad (4.33)$$

A Schrödinger egyenlet megoldásai a kvantummechanikából ismertek, 3 dimenzióban a lehetséges energiaállapotokat a

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega \quad (4.34)$$

kifejezés írja le, ahol n_x , n_y és n_z egész számok, és a három irányba eső gerjesztéseket írják le. A héjakat alkotó állapotok számák meghatározhatjuk annak alapján, hogy egy adott $(N + 3/2)\hbar\omega$ energiaállapotot az n_x , n_y és n_z hányféle kombinációja tud előállítani. Ennek alapján

N	n_x	n_y	n_z	n_N	$\sum n_N$
0	0	0	0	2	2
1	1	0	0	6	8
	0	1	0		
	0	0	1		
2	2	0	0	12	20
	0	2	0		

	0	0	2		
	1	1	0		
	1	0	1		
	0	1	1		
3	3	0	0	20	40
	⋮				

4.2. táblázat: A harmonikus oszcillátor egyes energiszintjeihez (N) tartozó állapotok száma (n_N), illetve a lezárt héjakhoz tartozó „mágikus számok” (a spin szabadsági fokok figyelembevételével).

A táblázatból azonnak leolvashatjuk az adott N energiaszinthez ($E = (N + 3/2)\hbar\omega$) tartozó n_N állapotok számát (a két spin szabadsági fokok is figyelembe véve állapotonként), valamint a lezárt héjakhoz tartozó állapotok számát, a „mágikus számokat”. Ezek a $(N + 1)(N + 2)(N + 3)/3$ képlettel jellemezhetőek és értékük 2,8,20,40,70,112, ... A harmonikus oszcillátor modell által adott mágikus számokból az első három egyezik a megfigyelt értékekkel.

Az oszcillátor frekvenciát a következő megfontolásokkal kaphatjuk meg: alapállapotban a tömegszám megegyezik a legalacsonyabban fekvő állapotok számával, az energia pedig minden N nívón $(N+3/2)\hbar\omega$ azaz,

$$A = \sum_{N=0}^{N_{max}} (N + 1)(N + 2) \approx \frac{1}{3} N_{max}^3 \quad (4.35)$$

$$E = \sum_{N=0}^{N_{max}} (N + 1)(N + 2)(N + 3/2)\hbar\omega \approx \frac{1}{4} N_{max}^4 \hbar\omega.$$

A tömegegységre eső energia azonban kifejezhető a potenciál átlagértékének kétszeresével (a kinetikus és potenciális energia átlagosan megegyezik),

$$E = m\omega^2 \langle r^2 \rangle A, \quad (4.36)$$

amiből ($\langle r^2 \rangle = r_0^2 A^{2/3}$) az oszcillátor frekvencia kifejezhető

$$\hbar\omega \approx 30 A^{-1/3} \text{ MeV}. \quad (4.37)$$

A harmonikus potenciál modell megoldható természetesen gömbi polárkoordinátákban is. A megoldások az $N, 0 \leq l \leq N, -l \leq m \leq l$ kvantumszámokkal

jellemezhetőek. A paritás megmaradása miatt azonban csak egyfajta paritású állapotok alkotnak egy héjat, azaz az l impulzusmomentum egy héjon belül vagy csak páros, vagy csak páratlan, és minden l -hez összesen $2(2l + 1)$ állapot tartozik. Az előbb ismertetett héjak így a következő állapotokat tartalmazzák,

N	0	1	2	3	...
l	1s	1p	2s 1d	2p 1f	...

A modell egyszerűen általánosítható deformált magokra is. Ebben az esetben a potenciál más az egyik irányban, mint a másik kettőben,

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega_x^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2. \quad (4.38)$$

Az energiaszintek most két számmal jellemezhetőek,

$$E = (N_1 + 1) \hbar\omega_x + (N_2 + \frac{1}{2}) \hbar\omega_z, \quad (4.39)$$

ahol $N_1 = n_x + n_y$ és $N_2 = n_z$. A fenti táblázat ennek megfelelően módosul ($\omega_z > \omega_x$),

N_1	N_2	n_N	$\sum n_N$
0	0	2	2
1	0	4	6
0	1	2	8
2	0	6	14
1	1	4	18
0	2	2	20
3	0	8	28
2	1	6	34
1	2	4	38
0	3	2	40
⋮			

4.4. táblázat: Deformált harmonikus oszcillátor energiaszintjei és mágikus számai.

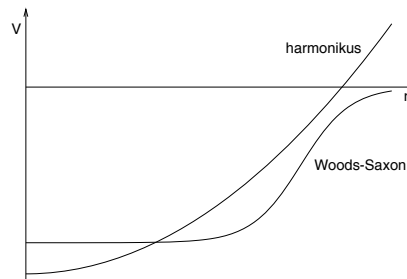
Láthatjuk, hogy új, megfigyelt mágikus számok is megjelennek, például a 14-

es. Az ehhez tartozó mag erősen deformált, ezért viselkedik úgy, mintha mágikus számhoz tartozna.

4.2.3. A Woods-Saxon potenciál

A harmonikus oszcillátor potenciál ugyan tartalmazza a magok lokalizáltságát, de a tapasztalattal szemben a potenciál nagy távolságokon végtelenhez, és nem nullához tart. Mivel ezekben az átlagtér modellekben azt tételezzük fel, hogy a nukleon által észlelt átlegpotenciált a többi nukleon generálja, célszerű azt feltételezni, hogy a potenciál követi a (nagy) magok kísérletileg mért sűrűségeloszlását. Ezt a potenciált hívják Woods-Saxon potenciálnak,

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\sigma}}} \quad (4.40)$$



4.6. ábra. Woods-Saxon és harmonikus potenciál összehasonlítása.

A lényeges eltérés a Woods-Saxon és a harmonikus potenciál között (4.6 ábra), hogy az előbbi sekélyebb kis távolságon, és mélyebb nagy távolságon, azaz a Woods-Saxon potenciál esetében lecsökken a középpont körül lokalizálódó kis impulzusmomentumú állapotok energiája, és mélyül a centrumból kiszoruló nagyobb impulzusmomentumú állapotok energiája. Ez a 20-as mágikus számig még nem okoz különbséget, azonban e fölött már megszűnik a különböző impulzusmomentumú állapotok energiájának azonossága.

4.2.4. Spin-pálya csatolás

A mágikus számok pontos értékének beállításában jelentős szerepe van a spin-pálya csatolásnak, melyet az atomfizikához hasonló módon vezetünk be (ld. 2.123),

$$-2V_{LS}\vec{L}\vec{S} = -V_{LS}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2). \quad (4.41)$$

Mivel az egyrészezskeállapotok spinje $1/2$, ezért adott l impulzusmomentumhoz a teljes impulzusmomentum két értéke, a $j_< = l - 1/2$ és $j_> = l + 1/2$ tartozik. Ezeknek az állapotoknak a járuléka az energiához

$$\begin{aligned} V_{LS}(l+1) & \text{ ha } j_< = l - 1/2 \\ -V_{LS}l & \text{ ha } j_> = l + 1/2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

azaz a $j_>$ állapotok energiája lecsökken, a $j_<$ állapotoké megnő. A teljes felhasadás a két állapot között $V_{LS}(2l+1)$.

Mivel a teljes impulzusmomentum megmaradó mennyiség, ezért a kvantumállapotokat a teljes impulzusmomentum szerint osztályozhatjuk (de nem a pályaimpulzusmomentum szerint). Adott teljes impulzusmomentumon $2j+1$ nívó helyezkedik el (most nincsen 2-es faktor a spin szabadsági fokok miatt, mivel azokat a j tartalmazza!). A Woods-Saxon potenciál miatt a 20-as mágikus szám fölött már érződik a nagyobb impulzusmomentumú állapotok jobb kötése, ezért az egyrészezsckenívók a következők:

N	0	1	2	3	4	5	6
l	0	1	2 0	3 1	4 2 0	5 3 1	6
j	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
n	2	4 2	6 4 2	8 6 4 2 10	8 6 4 2 12	10 8 6 4 2 14	14
M	2	8	20	28	50	82	126

4.5. táblázat: A Woods-Saxon modell mágikus számai ($M=\sum n$).

Az $n = 3$ nívó legmagasabb impulzusmomentumú állapotának energiája annyira lecsökken, hogy önálló héjat alkot, míg az $n = 4, 5, 6$ nívók legmagasabb impulzusmomentumú állapotának energiája már bele is csúszik a megelőző nívók energiszintjeibe, és így alakulnak ki a megfigyelhető mágikus számok. Ezek az értékek gömbszimmetrikus (illetve nem nagyon deformált) magokra érvényesek,

erős deformáció esetén, mint azt a harmonikus potenciál modellnél láttuk kialakulhatnak még közbenső, a kötési energiát tekintve mágikusnak látszó magok is.

4.3. Önkonzisztens tér

Az eddigiekben a magerőket úgy képzeltük el, hogy a részecskék közti kölcsönhatás egy *átlagteret* hoz létre, melyet a külső $V(r)$ potenciállal írunk le. Az összes egyrészecskemodell ebbe a kategóriába tartozik, a rendszer teljes Hamilton operátort felosztjuk egy külső tér, és egy maradékpotenciál kölcsönhatásra,

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A t_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A v_{ij} = H_0 + H_1, \quad t_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \quad (4.43)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^A (t_i + V_i), \quad H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A v_{ij} - \sum_{i=1}^A V_i,$$

ahol $V_i = V(\vec{r}_i)$, t_i a kinetikus energia operátora, v_{ij} pedig a két részecske között ható potenciál (pl. az egy mezon kicserélődési kép esetén a Yukawa potenciál). A V „külső” potenciál megválasztása annál jobb, minél kisebb lesz a H_1 maradékpotenciál járuléka. Az egyrészecskemodellek abban különböznek egymástól, hogy miként választják szét a V átlagpotenciált és a H_1 maradékpotenciált.

A rendszert leíró másik jellemző a hullámfüggvény, illetve a belőle számolható sűrűség,

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A |\phi_i(\vec{r})|^2, \quad (4.44)$$

ahol $\phi_i(\vec{r})$ az i . részecske egyrészecske hullámfüggvénye. A számolások során a H_0 operátor sajátfüggvényeit használjuk, feltételezve, hogy H_1 „kicsi”. A számolás annál jobb, minél közelebb van az így számolt sűrűség a kísérletileg mért eloszláshoz.

Ennek alapján az eddig tárgyalt egyrészecske potenciálok a következők:

- Fermi gáz modell:

$$H_0 = \sum_i t_i, \quad V_i = 0, \quad \phi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_i \vec{r}_i} \chi_i \zeta_i, \quad (4.45)$$

ahol χ_i a spin, ζ_i pedig az izospin hullámfüggvény. A sűrűségeloszlás homogén (mint ahogy a kiinduló potenciál is az), és ez nem felel meg az elvárásainknak.

- Harmonikus potenciál modell:

$$V_i = \frac{1}{2}m\omega^2 r_i^2, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i\phi_i + V_i\phi_i = e_i\phi_i. \quad (4.46)$$

A hullámfüggvények a H_0 egyrészesceoperátor sajátfüggvényei. Az ezekből számolt sűrűség már nem homogén, de nincs szinkronban a potenciállal, mely végtelenben végtelen tart, míg a sűrűség ugyanitt nullához tart.

- Woods-Saxon potenciál:

$$V_i = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r_i - R}{\sigma}}}, \quad (4.47)$$

és a hullámfüggvények ismételen a H_0 egyrészesceoperátor sajátfüggvényei. A számolható sűrűség követi a kívánt alakot, és korrelációban van a potenciállal, ami a model belső konzisztenciájára utal.

4.3.1. A Hartree-Fock számolás

A Hartree-Fock eljárás arra ad lehetőség, hogy a v_{ij} kétrészesce potenciál ismeretében kiszámoljuk a „legjobb” V átlagteret. Az eljárást eredetileg az atomfizikában fejlesztették ki, de igen hasznosnak bizonyult a magfizikában is.

Hartree vezette be azt a közelítést, hogy a rendszer teljes hullámfüggvényét írjuk fel az egyrészesce hullámfüggvények egyszerű szorzataként, feltételezve, hogy a teljes hullámfüggvény szeparálható az egyrészesceállapotok szorzatára. Azt várjuk, hogy minél jobban működik az egyrészescekép, ez a feltételezés annál jobb. Ez a hullámfüggvény azonban nem elégíti ki a Pauli elvet, ezért Fock azt javasolta, hogy az egyszerű szorzat helyett az antiszimmetrizált szorzatot használjuk (Hartree-Fock közelítés),

$$\Psi = \mathcal{A} \prod_{i=1}^A \phi_i = \frac{1}{\sqrt{A!}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \phi_1(i_1) \phi_2(i_2) \dots \phi_A(i_A), \quad (4.48)$$

ahol a i_j jelölés a $(\vec{r}_{i_j}, s_{i_j}, t_{i_j})$ hely, spin és izospin értékeket takarja, \mathcal{A} pedig az antiszimmetrizálás operátora. Speciálisan, $A = 2$ esetére

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{t}_1) \phi_2(\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{t}_2) - \phi_1(\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{t}_2) \phi_2(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{t}_1)]. \quad (4.49)$$

Az így felírt alak garantálja, hogy ha két részecske kvantumszámai megegyeznek, akkor a teljes hullámfüggvényben az a két részecske felcserélhető. Ugyanakkor az antiszimmetrizálás miatt két részecske felcserélésére a teljes hullámfüggvény előjelet vált, azaz egyenlő lesz önmaga -1-szeresével. Ez csak úgy lehet, hogy a teljes hullámfüggvény zérus, azaz ilyen állapot nem valósul meg.

A Hartree-Fock számolásban feltesszük továbbá, hogy a részecskék között ható potenciál felírható két nukleon között ható potenciálok összegeként,

$$H = \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}. \quad (4.50)$$

A teljes potenciális energia

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}, \\ V_{ij} &= \langle \Psi | v_{ij} | \Psi \rangle = \langle \phi_{ij}(12) | v_{12} | \phi_{ij}(12) \rangle. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Itt kihasználtuk, hogy a potenciál csak két részecske között hat, ezért azt elég a

$$\phi_{ij}(12) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_i(1)\phi_j(2) - \phi_i(2)\phi_j(1)] \quad (4.52)$$

kombinációra kiértékelni. Az egyszerűség kedvéért egy pillanatra elhagyva a spin- és izospin indexeket a potenciális energia

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int d^3 r_1 d^3 r_2 [\phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) v_{ij} \phi_i(\vec{r}_1) \phi_j(\vec{r}_2) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) v_{ij} \phi_i(\vec{r}_2) \phi_j(\vec{r}_1)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \phi_i^*(\vec{r}) V_H \phi_i(\vec{r}) - \frac{1}{2} \int d^3 r d^3 r' \phi_i^*(\vec{r}) V_F \phi_i(\vec{r}') \end{aligned} \quad (4.54)$$

(itt kihasználtuk, hogy egy tagban az összes index, mivel integrálási változó, felcserélhető, és ez egy kettes faktort eredményez, ami semlegesíti a hullámfüggvényben levő $1/\sqrt{2}^2$ faktort.), ahol

$$\begin{aligned} V_H(\vec{r}) &= \sum_{j \neq i}^A \int d^3 r' v_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') |\phi_j(\vec{r}')|^2 \\ V_F(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_{j \neq i}^A v_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') \phi_j^*(\vec{r}') \phi_j(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

a (lokális) Hartree és a (nem lokális) Fock potenciálok. Ezek segítségével az egyrészecske Schrödinger egyenletek felírhatóak,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_H(\vec{r})\right)\phi_i(\vec{r}) - \int d^3r' V_F(\vec{r}, \vec{r}')\phi_i(\vec{r}') = \epsilon_i\phi_i(\vec{r}), \quad (4.56)$$

ahol ϵ_i az i . hullámfüggvényhez tartozó egyrészecske energia. Az egyrészecske hullámfüggvények függenek a (4.55) potenciáloktól, melyek viszont függenek a hullámfüggvényektől, így a Schrödinger egyenlet önkonzisztens megoldásait keressük. A „legjobb” potenciált ezek után iterációval határozzuk meg: kiválasztunk egy szimpatikus hullámfüggvény bázist, abból kiszámoljuk a (4.55) potenciálokat, majd azokkal megoldjuk a (4.56) Hartree-Fock Schrödinger egyenletet, amiből megkapjuk az újonnan használandó hullámfüggvényeket. Az iteráció akkor szakad meg, amikor a hullámfüggvény (és ezáltal a potenciál és az egyrészecske energia) már nem változik többet. Az ilyen számolások természetesen csak numerikusan végezhetőek el, és akkor állunk le az iterációval, ha már csak „elég keveset” változik a hullámfüggvény.

A számolás végeredményével definiálható egy ún. ekvivalens potenciál,

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{\phi_i(\vec{r})} \int d^3r' (V_H(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}') - V_F(\vec{r}, \vec{r}'))\phi_i(\vec{r}') \quad (4.57)$$

melynek a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_i(\vec{r}) + U(\vec{r})\phi_i(\vec{r}) = \epsilon_i\phi_i(\vec{r}) \quad (4.58)$$

Schrödinger egyenletbe helyettesítésével megkapjuk a teljes Hartree-Fock számolás energiáit és hullámfüggvényeit. Az így kapott ekvivalens potenciál rendkívül hasonlít a Woods-Saxon potenciálra, és ez magyarázza annak sikerét a magszerkezet leírásában.

4.3.2. Az egyrészecske energiák Hartree-Fock közelítésben

A (4.56) Schrödinger egyenlet egyrészecske energia definíciója alapján a teljes energia¹

$$E = \sum_{i=1}^A \langle \phi_i | \hat{t} | \phi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_{ij} | v_{ij} | \phi_{ij} \rangle$$

¹Szorozzuk be a (4.56) egyenletet balról $\langle \phi_i(\vec{r}) |$ -rel.

$$= \sum_{i=1}^A \langle \phi_i | \hat{t} | \phi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \langle \phi_i | e_i - t_i | \phi_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (t_i + e_i), \quad (4.59)$$

míg külső potenciál alkalmazása esetén

$$E = \sum_{i=1}^A \langle \phi_i | \hat{t} + V | \phi_i \rangle = \sum_{i=1}^A e_i, \quad (4.60)$$

azaz külső potenciál esetén a rendszer teljes energiája az egyrészesecske energiák összege, de kétrészesecske potenciálok esetén ez már nem igaz! Így, ha az egyrészesecske energiák megegyeznek egy kétrészesecske potenciálon, és egy külső potenciálon alapuló modellben, akkor a teljes energiák különbözni fognak!

4.3.3. Potenciális energia Fermi gáz bázison

Válasszuk most a ϕ_i egyrészesecske hullámfüggvényeket síkhullámoknak (mint a Fermi gáz modellben). Ekkor

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \chi_i \zeta_i, \quad (4.61)$$

ahol χ_i a spin-, ζ_i az izospin hullámfüggvény. A kinetikus energia egyrészesecske operátor, ezért az antiszimmetrizált szabad rendszer kinetikus energiája pontosan megegyezik a Fermi gáz modell kinetikus energiájával. A potenciális energia azonban kétrészesecske operátor, ennek számolása bonyolultabb.

Először vizsgáljuk meg a (4.52) kétrészesecske kifejezést. Két 1/2 spinű és 1/2 izospinű részesecske az $S = 0$ szinglett vagy $S = 1$ tripllett, illetve a $T = 0$ izoszinglett vagy $T = 1$ izotriplett állapotban lehet. Mivel a tripllett állapotok szimmetrikusak, a szinglettek meg antiszimmetrikusak, így a teljes hullámfüggvény antiszimmetrikus, ha

T, S	térbeli rész	állapotok száma
$T = 1, S = 1$	antiszimmetrikus	9
$T = 1, S = 0$	szimmetrikus	3
$T = 0, S = 1$	szimmetrikus	3
$T = 0, S = 0$	antiszimmetrikus	1

azaz a térbeli hullámfüggvény $5/8$ valószínűséggel antiszimmetrikus, $3/8$ valószínűséggel szimmetrikus, ezért a potenciális energia

$$\begin{aligned} V_{ij} = & \frac{1}{2V^2} \int d^3r_1 d^3r_2 \times \\ & \left[\frac{3}{8} \left(e^{-i\vec{k}_1\vec{r}_1 - i\vec{k}_2\vec{r}_2} + e^{-i\vec{k}_1\vec{r}_2 - i\vec{k}_2\vec{r}_1} \right) v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}_1 + i\vec{k}_2\vec{r}_2} + e^{i\vec{k}_1\vec{r}_2 + i\vec{k}_2\vec{r}_1} \right) \right. \\ & \left. \frac{5}{8} \left(e^{-i\vec{k}_1\vec{r}_1 - i\vec{k}_2\vec{r}_2} - e^{-i\vec{k}_1\vec{r}_2 - i\vec{k}_2\vec{r}_1} \right) v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}_1 + i\vec{k}_2\vec{r}_2} - e^{i\vec{k}_1\vec{r}_2 + i\vec{k}_2\vec{r}_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.62)$$

ahol feltételeztük, hogy a mageről centrális, és csak az $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ távolságkombinációtól függenek. Bevezetve a $2\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ jelölést, és kiintegrálva a tömegközéppont $\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ koordinátáira, a potenciális energia a

$$\begin{aligned} V_{ij} = & \frac{1}{V} \int d^3r v(r) \left[1 - \frac{1}{4} \cos(2\vec{k}\vec{r}) \right] \\ = & \frac{4\pi}{V} \int r^2 dr v(r) \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\sin 2kr}{2kr} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

egyszerű alakra hozható.

Yukawa potenciál esetén

$$v(r) = -v_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad V_{ij} = -\frac{4\pi}{V} v_0 \left[\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{4k^2 + \mu^2} \right]. \quad (4.64)$$

A (4.51) teljes potenciális energia a V_{ij} kétrészecskeenergiák összege a különböző k_i, k_j állapotpárokra. Az állapotokra való összegzést a Fermi gáz modellnél ismertett módon az impulzusra való integrállá lehet átírni, csak két részecske esetén gondosan kell elemezni az integrálási határokat (ld. a fejezet végén található Függelék),

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j=1}^A & \longrightarrow \left(\frac{4\pi g V}{(2\pi)^3} \right)^2 \int_0^{k_F} dk_i k_i^2 \int_0^{k_F} dk_j k_j^2 \\ & = \frac{g^2 V^2}{3\pi^4} \int_0^{k_F} k^2 dk (2k_F^3 - 3k_F^2 k + k^3). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Elvégezve az integrálást a Yukawa potenciálra, kapjuk, hogy

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \longrightarrow -\frac{2\pi v_0}{\mu^2} A \rho \left(1 - \frac{9}{16} \frac{\mu^2}{k_F^2} \right). \quad (4.66)$$

A (4.20) kinetikus energiával együtt az egy részecskére jutó energia

$$E/A = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \varrho^{2/3} - \frac{2\pi v_0}{\mu^2} \varrho \left(1 - \frac{9}{16\hbar^2} \left(\frac{g}{6\pi^2} \right)^{2/3} \frac{\mu^2}{\varrho^{2/3}} \right) \quad (4.67)$$

független a tömegszámtól, azaz, ha a sűrűség telített (azaz független a tömegszámtól), akkor az energia automatikusan telítettséget mutat. A probléma a fenti képlettel, hogy az egy részecskére jutó energiának maximuma van, minimuma azonban nincsen, és hatására a mag igyekezne minél kisebbre összehúzódni.

A megoldást a szórásnál már említett sebességfüggő potenciál adja meg (vagy az ezzel ekvivalensen megfogalmazható taszító törzs: kb. 0.5 fm-nél kisebb távolságokon a magerők taszítóak). Ekkor a

$$v_0 \longrightarrow v_0 - v_1 k^2 \quad (4.68)$$

helyettesítést kell elvégeznünk a potenciális energia kiértékelésében (v_1 a taszító törzs erőssége), mely egy $k^8 V \sim \varrho^{5/3} A$ tagot eredményez a momentumösszegzés után. Ezzel a taggal a (4.67) energiakifejezésnek már minimuma van, és a potenciálok erősségének megválasztásával beállítható a sűrűség kísérletileg mért értéke.

Mivel a sebességfüggő potenciál egy ugyanolyan k^2 tagot hoz be a részecske energiájába, mint a kinetikus energia², ezért a potenciál hatása átírható a tömegbe,

$$\langle v_{1,i} \rangle = \frac{1}{V} \sum_j v_1 k_{ij}^2 = v_1 \int \frac{d^3(\hbar k)}{h^3} \left(\frac{\vec{k}_i - \vec{k}}{2} \right)^2 \longrightarrow \frac{v_1}{4} \varrho \left[k_i^2 + \frac{3}{5} k_F^2 \right] \quad (4.69)$$

és

$$\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} + \frac{2\pi}{\mu^2} \langle v_{1,i} \rangle \longrightarrow \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m^*} - V, \quad (4.70)$$

ahol a megjelenő m^* kifejezés az *effektív tömeg*, és

$$\frac{1}{2m^*} = \frac{1}{2m} + \frac{2\pi v_1}{4\mu^2} \varrho. \quad (4.71)$$

Itt μ a (4.64) Yukawa potenciál hatótávolsága (mely kisebb, mint a v_0 -hoz tartozó vonzó Yukawa potenciál hatótávolsága). A sebességfüggő erők hatása olyan nagy a magban, hogy az effektív tömeg az eredeti tömeg 60%-ára csökken le!

²csak az utóbbi a részecske impulzusát, az előbbi pedig két részecske relatív impulzusát tartalmazza.

A kapott energikifejezést a sűrűség szerint minimalizálva megkapható a legkisebb energiához tartozó sűrűség, és kiszámolható, hogy ezen a sűrűségen az utolsó (Fermi szinten levő) nukleon energiája pontosan megegyezik az egy részecskére jutó átlagos kötési energiával. Ez is a *telítettség* következménye: újabb részecske hozzáadásával az egy részecskére jutó kötési energia nem változik.

Más potenciálokból kiindulva kissé már alakok is kaphatók, de ezek igazából a taszító törzs hatványát változtatják csak. Általánosan a kötési energia sűrűségfüggése (az ún. állapotegyenlet nulla hőmérsékleten) az

$$\frac{E}{A} = \alpha \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} - \beta \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\sigma+1} \quad (4.72)$$

alakban írható, ahol $\sigma \in [1/6, 1]$. Az alsó értékhez tartozó kifejezést puha állapotegyenletnek, a felsőhöz tartozót kemény állapotegyenletnek nevezik. Mivel a sűrűség kontrollálható módon nem változtatható túl nagy határok között, ezért annak eldöntése, hogy melyik a jobb, nem egyszerű feladat, és ellentmondások is: a nagyenergiás nehézion kísérletek a keményebb állapotegyenletet részesítik előnyben, ellenben a neutroncsillag megfigyelések meg a puhábbat.

4.4. A független részecskékép alkalmazhatósága

Az eddigiekben részletesen tárgyaltuk az egyrészecske modelleket, és azt találtuk, hogy azok sikeres leírják a magok számos tulajdonságát, beleértve a telítettséget is. A kérdés, hogy egy olyan rendszerrel, mint az atommag, melyet az erős kölcsönhatás tart össze, és így joggal feltételezhetnénk, hogy benne az alkotóelemek elvesztik individualitásukat, hogyan lehetséges, hogy ezek az egyrészecske modellek jól működnek.

Egy független részecskemodell akkor alkalmazható, ha az alkotóelemek kvantumszámjai nem változnak a kölcsönhatás során. Ezek a kvantumszámok ütközések révén változhatnak, azaz, ha a magon belül állandóan ütköznek a nukleonok, akkor nem tudnánk alkalmazni a független részecske képet. Az ütközéseket a Pauli elv korlátozhatja, ha nincsen szabad, energetikailag elérhető kvantumállapot, akkor nem következik be ütközés. Ez történik a magok alapállapotában.

Végezzünk egy becslést ennek az effektusnak a működésére. Ha a magot egy b szélességű és V_0 mélységű négyszögpotenciállal modellezzük, akkor a szórásra a (2.72) radiális Schrödinger egyenletet írjuk fel, a legalacsonyabb energián az $l = 0$ impulzumomentummal, és kötött állapotra,

$$u'' + K^2 u = 0, \quad r < b, \quad u'' + k^2 u = 0, \quad r > b, \quad (4.73)$$

ahol

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + k^2} \approx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0}, \quad (4.74)$$

mivel, mint láttuk, a potenciál jóval mélyebb, mint a részecskeállapot energiája. Ahhoz, hogy a szórás létrejöheszen, a K hullámszámnak nagyobbak kell lennie a Fermi szintnél,

$$K \sim \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0} > k_F = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{1/3}, \quad (4.75)$$

azaz

$$V_0 > \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{p_F^2}{2m} \approx 40 \text{ MeV}. \quad (4.76)$$

Azt láttuk, hogy a potenciálgödör mélysége ebben a nagyságrendben mozog, de az átlagpotenciál esetén ezt az értéket a taszító törzs, magerők kicserélő jellege és a tenzoreroők gyengítik, és ezért a fenti összefüggés nem áll fenn. A magok nagy sűrűsége (és ezáltal magas Fermi szintje) megakadályozza a magon belüli ütközéseket, és az erős kölcsönhatás ellenére független részecskékké írhatók le a nukleonok.

Függelék: A kettős impulzusintegrál

Vezessük be a teljes és a relatív impulzust,

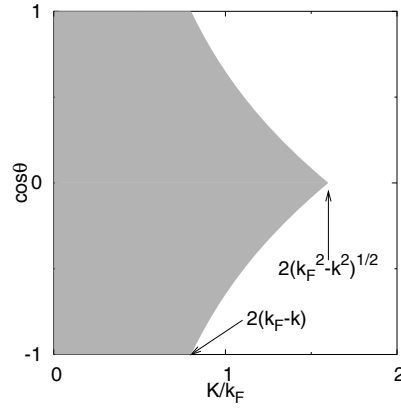
$$\vec{K} = \vec{k}_i + \vec{k}_j, \quad 2\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_j. \quad (4.77)$$

A transzformáció Jacobi determinánása 1, ezért

$$\int_{|k_{i,j}| \leq k_F} d^3 k_i d^3 k_j \longrightarrow \int_{|k_{i,j}| \leq k_F} d^3 k d^3 K = 8\pi^2 \int k^2 dk \int K^2 dK \int d \cos \theta, \quad (4.78)$$

ahol az integrálás az eredeti $|k_{i,j}| \leq k_F$ tartományra értendő. Próbáljuk meg most ezt a tartományt kifejezni az új változókkal. Az eredeti impulzusok kifejezhetők, mint

$$\vec{k}_{i,j} = \frac{1}{2} \vec{K} \pm \vec{k}. \quad (4.79)$$

4.7. ábra. Integrálási tartomány a $(K, \cos \theta)$ síkban.

Az integrálási tartomány

$$k_{i,j}^2 = \frac{1}{4}K^2 + k^2 \pm Kk \cos \theta \leq k_F^2, \quad (4.80)$$

és ebből az egyenlőtlenségből

$$|\cos \theta| \leq \frac{|k_F^2 - k^2 - \frac{1}{4}K^2|}{Kk}. \quad (4.81)$$

Ugyanakkor $|\cos \theta| \leq 1$ miatt a $\cos \theta$ szerinti integrálban levágás van. Az integrálási tartományt adott k relatív impulzusra a 4.7 ábrán mutatjuk be. Ennek alapján a szögre és a teljes impulzusra való integrálás

$$2 \int_0^{2(k_F - k)} K^2 dK + \frac{2}{k} \int_{2(k_F - k)}^{2\sqrt{k_F^2 - k^2}} K dK (k_F^2 - k^2 - \frac{1}{4}K^2) \quad (4.82)$$

és a (4.78) integrálás a

$$\frac{64\pi^2}{3} \int_0^{k_F} k^2 dk (2k_F^3 - 3k_F^2 k + k^3) \quad (4.83)$$

alakra hozható.

5. fejezet

Bomlások

A 2.1 fejezetben tanulmányozott szórási probléma átírható más tárgyalásmódban. A (rugalmas) szórás során a bejövő \vec{k} hullámszámú részecske egy másik, \vec{k}' kvantumállapotban távozik. Ezt a jelenséget leírhatjuk egy olyan képpel, hogy a kölcsönhatás „eltüntette” a \vec{k} kvantumszámú részecskét, és „megkeltette” a \vec{k}' kvantumszámút. Ezt a leírásmódot nevezik másodkvantált formalizmusnak, és könnyen általánosítható nem rugalmas szórásokra is, a megfelelő keltő operátorok bevezetésével.

A \vec{k} hullámszámú fermion eltüntető operátort $a_{\vec{k}}$ -val jelöljük, a \vec{k}' hullámszámú fermion keltő operátort pedig $a_{\vec{k}'}^\dagger$ -vel. A 2.1 fejezet szórásoperátora így

$$\hat{S} = f(\vec{k}, \vec{k}') a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^\dagger \quad (5.1)$$

alakban írható (az a és a^\dagger operátorok általánosan nem cserélhetők fel). A különböző részecskék keltési és eltüntetési operátorait kombinálva (a megmaradó mennyiségekre ügyelve) felírhatók a tetszőleges reakciók kölcsönhatási operátorai. Az a^\dagger kelti a fermionokat, a b^\dagger az antifermionokat, a c^\dagger a bozonokat.

5.1. Gyenge kölcsönhatás

A gyenge kölcsönhatás prototípusa a β bomlás, amikor a magból távozik egy elektron, és a visszamaradó mag töltése eggyel megnő, miközben tömegszáma nem változik. Az elemi folyamat a neutron bomlása,

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad (5.2)$$

ahol a $\bar{\nu}_e$ részecskéről a későbbiekben lesz szó. A β bomlás megfigyelésekor már felvetődött, hogy honnan jönnek az elektronok, hiszen a határozatlansági reláció alapján kizártuk, hogy a magon belül tartózkodtak volna eredetileg. Ebből viszont az következik, hogy az e^- a bomlás pillanatában keletkezik, a protonnal és a $\bar{\nu}_e$ -vel együtt, miközben a neutron „eltűnik”. A folyamatot a

$$\hat{S} \sim a_n a_p^\dagger a_e^\dagger b_\nu^\dagger \quad (5.3)$$

szórásoperátor írja le.

A szabad neutron 17 perc alatt bomlik el a fenti módon, így a bomlás elég lassú. Mivel a neutron tömege nagyobb, mint a proton és az elektron tömege együttesen, ezért a bomlásnak energetikai akadálya nincsen, sőt még energia is szabadul fel. Más a helyzet az atommagon belül, mivel mind a proton, mind a neutron energiaszintek be vannak töltve a Fermi szintig, és a két Fermi szint megegyezik, a proton és a neutron összenergiája (tömege) közel egyenlő. A bomlás során létrejövő új protonnak magasabb energiaszintre kéne kerülnie a Pauli elv miatt, ezt azonban az energiamegmaradás nem teszi lehetővé, a neutron az atommagban stabil tud maradni. A β bomlás feltétele a magban, hogy a (4.1) félempírikus kötési formulában a neutron bomlása után visszamaradt rendszer energiája kisebb legyen, mint a kiinduló rendszeré, azaz egy $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1)$ folyamatnál

$$\Delta E = -(m_n - m_p - m_e)c^2 + c_3 \frac{2Z + 1}{A^{1/3}} - 4c_4 \frac{N - Z - 1}{A} > 0. \quad (5.4)$$

Itt hallgatólagosan feltettük, hogy a $\bar{\nu}_e$ részecske tömege nulla. Mivel a neutron adott mag energianívóról távozott, a proton pedig adott mag energianívóra kerül, az energiakülönbség kvantált. A β bomlás felfedezésekor csak a neutron, proton és elektron ismerték, így azt várták, hogy az elektron kinetikus energiája is jól meghatározott értékű lesz, és jellemzi a két magnívó közti energiakülönbséget. Ehelyett egy folytonos energiaeloszlást találtak, szemben az α és γ sugárzással, melyek valóban követték a magnívók energiakülönbségét.

Az energiamegmaradás megmentésére különböző elméleteket gyártottak, például feltették, hogy a kilépő elektron kölcsönhat az atom elektronjaival, és ettől kenődik szét az energiája. Ezeket az elméleteket azonban kísérletileg cáfolták. Gondoltak arra is, hogy az elemi folyamatoknál az energi megmaradása esetleg csak átlagosan teljesül, azonban a kilépő elektronok maximális energiája mindig egyezett a magnívók energiakülönbségéből számolható értékkel. Ehhez társult, hogy az alaposabb vizsgálatok kimutatták, hogy nem csak az energia, de az impulzus, és az impulzusmomentum sem marad meg: miközben a kilépő elektron

feles spinű, a hátramaradó mag spinje 1 egységgel változik. Az elektron kilépésekor visszalökődő mag pedig nem az elektron impulzusával ellentétesen mozgott. Igen érdekes volt az energiaveszteség és az impulzusveszteség közötti összefüggés, mely

$$\Delta p \sim \Delta E/c - \text{nek} \quad (5.5)$$

adódott, és egy tömegtelen részecske spektrumára hasonlított.

Ezeket a megfigyeléseket összevetve 1931-ben Pauli felvetette, hogy egy, még láthatatlan részecske is távozik a β bomlásban, az antineutrínó. Ennek feles spinje van, tömegtelen, és semleges¹ Mivel igen nehéz volt kimutatni, a neutrínónak igen nagy az áthatoló képessége, és valóban a későbbiekben kimérték, hogy a teljes hatáskeresztmetszete 10^{-16} mb, azaz 17 nagyságrenddel kisebb a nukleon-nukleon hatáskeresztmetszetnél. A Napból a Föld felé száguldó rengeteg neutrínó közül csak egy elenyésző mennyiség fogódik be.

Az eddig ismertett β bomláson kívül más, hasonló folyamatokat is találtak. Ezeket a következőképp osztályozzuk:

- β^- negatív bomlás. A magból elektronok távoznak, a mag rendszáma 1-el nő. Ilyen az eddig említett $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.
- β^+ pozitív bomlás. A magból pozitronok távoznak, a mag rendszáma 1-el csökken. Ilyen folyamat a $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.
- EC (electron capture) elektron befogás. A mag befogja a hozzá közeli elektront, és rendszáma 1-el csökken. Ilyen folyamat a $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Mivel leggyakrabban a legbelső (K) héjon levő elektron fogódik be, sokszor K befogásnak is hívják. A következő héj az L héj, erről kisebb eséllyel fogódnak be elektronok. Például a ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$ folyamatban a K befogás hétszer valószínűbb, mint az L befogás.

Minden elemnek ismerünk valamilyen β bomlását, sok elemnek többféle bomlása is lehetséges, pl. a ${}_{29}^{64}\text{Cu}$ mindhárom ismertett módon bomlik, 39%-al β^- , 19%-al β^+ , 42%-al pedig EC módon. A könnyű magokban az utolsó két bomlás közül a β^+ , nehéz magokra az EC dominál.

¹Innen a neve is: kicsi neutron.

5.1.1. A β bomlás Fermi elmélete

A kölcsönhatás során az átmeneti valószínűséget az (1.36) Fermi aranyszabály határozza meg,

$$T(p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_v | H_\beta | \psi_k \rangle|^2 \varrho(E_0), \quad (5.6)$$

a kölcsönhatás mátrixelemének, és a végállapotsűrűségnek a szorzata. Vizsgáljuk most alaposabban ez utóbbit, mely a két kimenő részecske, az elektron és a neutrínó által elérhető fázisteret határozza meg, azaz

$$\varrho(E_0) dE_e = \frac{d^3 p_e}{h^3} \frac{d^3 p_\nu}{h^3} V^2 = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6} p_e^2 p_\nu^2 dp_e dp_\nu. \quad (5.7)$$

Mivel

$$E_e^2 = p_e^2 c^2 + m^2 c^4, \quad E_\nu = p_\nu c = E_0 - E_e \quad (5.8)$$

ezért

$$T(p_e) dp_e = K(E_0) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e, \quad (5.9)$$

ahol K az E_0 -tól függő normalizációs faktor (és tartalmazza a kölcsönhatási mátrixelemet is). Bevezetve a

$$\epsilon_0 = E_0/mc^2, \quad \epsilon = E/mc^2, \quad p_e dp_e = E_e dE_e \quad (5.10)$$

normalizált mennyiségeket

$$T(p_e) dp_e \sim \sqrt{\epsilon^2 - 1} (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \epsilon d\epsilon. \quad (5.11)$$

Az adott ϵ energiahányaddal kilépő elektronok száma, $N(\epsilon)$, arányos az átmeneti valószínűséggel, ezért az

$$\left(\frac{N(\epsilon)}{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} F_\pm(Z, \epsilon)} \right)^{1/2} = konst (\epsilon - \epsilon_0) \quad (5.12)$$

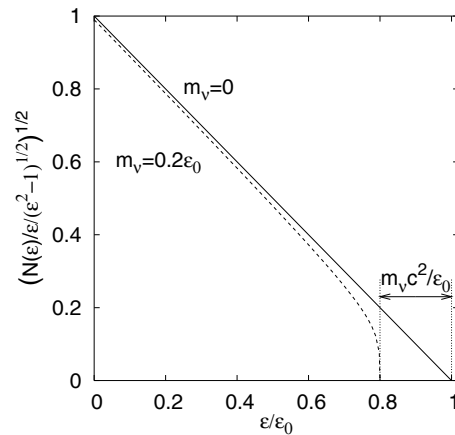
mennyiséget ábrázolva a mért pontoknak egy egyenesen kell elhelyezkedni. Ezt az megjelenítést Kurie ábrának nevezzük. Az egyenes végpontából megállapítható az elektronok maximális energiája, $E_0 = \epsilon_0 mc^2$. A pontos kísérleti kiértékeléshez természetesen figyelembe kell venni a távozó elektron (pozitron) és mag

Coulomb kölcsönhatását, mely pozitron esetén növeli, elektron esetén csökkenti a kilépő részecske energiáját. Ezzel az energiakülönbséggel vissza kell korrigálni a kísérletileg mért energiákat a Kurie ábra felrajzolásakor, és ezt fejezi ki a $F_{\pm}(Z, \epsilon)$ Fermi függvény, ahol a + előjel a pozitív, a - előjel a negatív β bomlás esetén értendő.

Nem nulla neutrínótömeg esetén ez a kifejezés a

$$T(p_e) dp_e \sim \sqrt{\epsilon^2 - 1} (\epsilon_0 - \epsilon) \sqrt{(\epsilon_0 - \epsilon)^2 - m_\nu^2 c^4} \epsilon d\epsilon \quad (5.13)$$

alakra módosul. A változást az 5.1 ábrán illusztráljuk: a véges neutrínótömeg csökkenti a maximális elektronenergiát, és annak közelében megváltoztatja a Kurie egyenes alakját. Ez a módszer azonban nem volt elég érzékeny ahhoz, hogy megbízhatóan kimutasson egy kicsi, de nem nulla neutrínótömeget.



5.1. ábra. β bomlás Kurie ábrája nulla (folytonos vonal) és nem nulla (szaggatott vonal) neutrínótömeg esetén.

Mivel az átmeneti mátrixelem fordítottan arányos a félélettartammal (nagy átmeneti valószínűség rövid bomlási időt jelent),

$$T_{1/2} \sim \frac{1}{T(p_e)}, \quad (5.14)$$

ezért a félélettartamot beszorozva a fázistér

$$f(Z, \epsilon_0) = \int_0^{\epsilon_0} d\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \epsilon F_{\pm}(Z, \epsilon) \quad (5.15)$$

járolékával egy, a kölcsönhatás mátrixelemére, azaz erősségére jellemző mennyiséget, az ún. összehasonlító élettartamot kapjuk. Ez a $fT_{1/2}$ mennyiség a mag szerkezetére utal (hogyan vesz részt a gyenge kölcsönhatásban), és széles, 0.8 s (${}^6\text{He}$ β bomlása) -10^{15} s (${}^{115}\text{Sn}$) tartományban mozog. Minél kisebb ez az érték, annál gyorsabb a bomlás. Mivel a különböző magok bomlásai csoportokba rendeződnek, ezért a leggyorsabban bomló csoportot szupermegengedett átmenetnek nevezzük. Ezek tipikusan az izobár analóg multiplettek közötti átmenetek, és az összehasonlító élettartam logaritmus ~ 3.5 . Ezeket követik a megengedett átmenetek ($\log fT_{1/2} \sim 5$), majd a különböző rendben tiltott átmenetek, ahol a kölcsönhatási mátrixelem igen kicsi, tipikusan azért, mivel az elektron és a neutrínó hullámfüggvénye csak kevéssé fed át a magon belül (például, mivel nagy impulzusmomentumot visznek el). Tipikusan $\log fT_{1/2} \sim 7, 12, 19, 23$ az első-, másod-, harmad- és negyedrendben tiltott folyamatokra.

Az elmélet kidolgozásakor még azt hitték, hogy a paritás megmarad a gyenge kölcsönhatásban, és a következő kiválasztási szabályok lehetségesek: A β bomlásban részt vevő elektron és neutrínó spinje lehet párhuzamos ($S = 1$), ezt hívjuk Gamow-Teller folyamatnak, és lehet ellentétes ($S = 0$), ezt hívjuk Fermi folyamatnak. A GT folyamat során a mag spinjének változása $\Delta I=0,1$, és *nem* lehetséges $0 \rightarrow 0$ átmenet. Fermi átmenetben a mag spinje nem változik, így a $0 \rightarrow 0$ átmenet tiszta Fermi bomlás. A többi átmenet a GT és a Fermi átmenet keveréke.

A Fermi elmélet az eddigiek túl becslést ad a kölcsönhatási mátrixelemre is, például $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ reakció esetén

$$\langle \psi_p | H_\beta | \psi_k \rangle = g \langle \psi_e | \mathcal{O} | \psi_\nu \rangle \langle \psi_p | \mathcal{O} | \psi_n \rangle, \quad (5.16)$$

ahol \mathcal{O} egy elemi operátor, skalár kölcsönhatás esetén 1, pszeudoskalár esetén γ_5 , vektor esetén γ_μ , stb. Az operátor pontos alakját (esetleges keveredésüket) a kísérletek alapján kell meghatározni. (??? nukelonokra is ???) Az így felírt alak egyben azt is feltételezi, hogy a négy részecske egy helyen hat kölcsön, azaz egy négy fermion pontszerű kölcsönhatást ír le. Meg lehet mutatni, hogy a Fermi folyamat a vektor, a Gamow-Teller folyamat az axiálvektor kölcsönhatásnak felel meg, mégpedig a kísérletek alapján maximális keveredéssel, azaz $\mathcal{O} = (1 + \gamma_5)\gamma_\mu$.

A β kölcsönhatás modern elméletében (Weinberg-Salam elmélet) a kölcsönhatást a töltött W^\pm és semleges Z^0 vektorbozonok közvetítik, melyeknek igen nagy a tömege, 80 GeV körüli, azaz a kölcsönhatás hatótávolsága 3 nagyságrenddel kisebb 1 fm-nél. Ez érthetővé teszi, hogy a pontszerű kölcsönhatásra épülő Fermi elmélet miért működik jól, legalábbis a vektorbozon tömegénél kisebb energiákon.

helicitás neutrino fajták, tomeguk

5.2. Elektromágneses kölcsönhatás

Az elektromágneses kölcsönhatás során a magot egy (vagy több) foton hagyja el, vagy nyelődik el, miközben a mag energiája megváltozik. Ennek értelmében a foton energiája két energiaszint különbsége, azaz az elnyelődés / kibocsátás spektruma egy jól meghatározott energia körüli Lorentz görbe (a bomlás miatt természetesen a csúcshoz van szélessége). Az energiaszintek lehetnek mind kollektív nívók közötti átmenetek (forgási energiaszintek, vagy például az óriás rezonanciák esetében a rezgési szintek), mint egyrészeske energiák. A folyamat általános jellemzője, hogy egy *sugárzási tér* hat kölcsön a maganyaggal.

Az ilyen kölcsönhatások pontos leírását a kvantumtérelmélet adja meg, azonban nagyon sok jelenség már klasszikus vagy kvantummechanika segítségével is értelmezhető. A külső elektromágneses tér és az anyag kölcsönhatása ismert az elektrodinamikából, a rendszer Hamilton függvénye

$$\mathcal{H}_{\text{kh}} = \int d^3r j_\mu A^\mu, \quad (5.17)$$

ahol j_μ az anyag négyesárama, A^μ pedig a külső elektromágneses tér négyespotenciálja. Mivel sugárzási tér esetében a skalárpotenciál nullának választható, ezért a továbbiakban a

$$\mathcal{H}_{\text{kh}} = -\frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \right] \quad (5.18)$$

kölcsönhatási Hamilton függvénnyel dolgozunk. A második tag a nukleonok spinből eredő $\mu_{p,n} \vec{s} = g_{p,n} \mu_0 \vec{s}$ saját mágneses momentumát tartalmazza, és a továbbiakban expliciten kiírjuk, és megkülönböztetjük a töltött részecskék áramát képviselő $\vec{j} = e\vec{p}/mc$ áramtól. Először vizsgáljuk meg a külső elektromágneses teret szabad (töltésmentes) térben. Az elektromos és mágneses térerősségek

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (5.19)$$

alakban írhatók fel a vektorpotenciál segítségével, a Maxwell egyenletek pedig a

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0 \quad (5.20)$$

alakot öltik a

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (5.21)$$

mértékrögzítéssel. A vektorpotenciált általános felírva ω frekvenciájú módusok

$$\vec{A} = \int d^3k q_k e^{-i\omega t} \vec{A}_k(\vec{r}) \quad (5.22)$$

összegeként, ahol $k = \omega/c$, kapjuk, hogy

$$\text{rot rot } \vec{A}_k - k^2 \vec{A}_k = 0. \quad (5.23)$$

Ennek az egyenletnek két megoldása található (gömbi polárkoordinátarendszerben), az ún. Hansen megoldások,

$$\begin{aligned} \vec{A}_{lm}^E(\vec{r}) &= -\frac{i}{k} \text{rot} \left[\vec{r} \times \vec{\nabla} (j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)) \right] \\ \vec{A}_{lm}^M(\vec{r}) &= \vec{r} \times \vec{\nabla} (j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)), \end{aligned} \quad (5.24)$$

ahol a felső sort az elektromos, a másodikat pedig a mágneses megoldásnak nevezük, Y_{lm} az l impulzusmomentumhoz és m vetületéhez tartozó gömbfüggvények, j_l pedig a gömbi Bessel függvény. A két megoldás a paritásban különbözik,

$$\vec{A}_{lm}^E(\vec{r}) = (-1)^{l+1} \vec{A}_{lm}^E(-\vec{r}), \quad \vec{A}_{lm}^M(\vec{r}) = (-1)^l \vec{A}_{lm}^M(-\vec{r}), \quad (5.25)$$

és mivel teljes (ortogonális) rendszert alkotnak, tetszőleges megoldás felírható ezen a bázison,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{lm\sigma} \int d^3k q_k^{lm\sigma} e^{-i\omega t} \vec{A}_{lm}^\sigma(k, \vec{r}), \quad (5.26)$$

ahol $\sigma = \{E, M\}$. Speciálisan, az (5.19) mezők

$$\vec{E}_{lm}^\sigma = ik \vec{A}_{lm}^\sigma, \quad \vec{H}_{lm}^\sigma = \text{rot } \vec{A}_{lm}^\sigma, \quad (5.27)$$

és (5.25) felhasználásával láthatjuk, hogy

$$\vec{H}^M = \vec{E}^E, \quad \vec{H}^E = -\vec{E}^M. \quad (5.28)$$

Mivel \vec{A}^M merőleges a helyvektorra, ezért \vec{E}^M és \vec{H}^E is az, és innen ered az elektromos / mágneses elnevezés is, mivel ez az oszcilláló elektromos / mágneses multipólusok sajátossága.

Vegyük észre, hogy (5.25) megoldások monopólus ($l = 0$) esetben azonosan eltűnnek, mivel a gömbfüggvény konstans voltából fakadóan a gradiens sugárirányú. Ez fejezi ki, hogy nem lehetséges olyan átmenet, mely csak monopólussugárzással valósulhatna meg.

A kölcsönhatás következtében létrejövő folyamat, melynek során a mag a kezdeti állapotból valamilyen végállapotba kerül, átmeneti valószínűségét a Fermi arany szabály adja meg,

$$T = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_v | \mathcal{H}_{\text{kh}} | \Psi_k \rangle|^2 \rho_v(E_v), \quad (5.29)$$

mely tartalmazza az E_v energia körüli végállapotsűrűséget, és a két energia közötti különbséget az elektromágneses mező

$$\hbar\omega = |E_k - E_v| \quad (5.30)$$

kvantuma hordozza.

Mivel a gömbi Bessel függvények kis argumentum esetén a

$$j_l(kr) \approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad (5.31)$$

sorba fejthetők, ahol $m!!$ az $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m$ szemifaktoriális jelenti, a $|\langle \Psi_v | \mathcal{H}_{\text{kh}} | \Psi_k \rangle|^2$ mátrixelemek a

$$\frac{4(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} |\langle \Psi_v | \mathcal{O}_{lm} | \Psi_k \rangle|^2 \quad (5.32)$$

alakra írhatók át, ahol \mathcal{O}_{lm} a

$$Q_{lm} = e \sum_{i=1}^Z r_i^l Y_{lm}^* - i\mu_0 \frac{k}{l+1} \sum_{i=1}^A g_i \vec{\sigma}_i \times \vec{r}_i \vec{\nabla} (r_i^l Y_{lm}^*) \quad (5.33)$$

elektromos, illetve

$$M_{lm} = \mu_0 \sum_{i=1}^A g_i \vec{s}_i \vec{\nabla} (r_i^l Y_{lm}^*) + \frac{2\mu_0}{l+1} \sum_{i=1}^Z \vec{l}_i \vec{\nabla} (r_i^l Y_{lm}^*) \quad (5.34)$$

mágneses multipól operátor egyike (\vec{l}_i az i . részecske pályaimpulzusmomentuma). A Q_{lm} operátor második tagjának nagyságrendje azonos az $M_{l+1,m}$ operátor mátrixelemével, és mint látni fogjuk, ezért elhanyagolható az első tag mellett.

A fenti közelítés akkor jogos, ha $kr \ll 1$, azaz

$$kr < kR = \omega R/c = \frac{\hbar\omega}{\hbar c} R = \frac{E_\gamma}{\hbar c} R \approx \frac{E_\gamma}{30\text{MeV}} \ll 1, \quad (5.35)$$

ahol $R \approx 6.5$ fm/t helyettesítettünk be. A magfizikában tanulmányozott, maximum 10-20 MeV-s fotonokra ez a feltétel fennáll.

A mag kezdeti J_k impulzusmomentumából a J_v végső impulzusmomentumba való átmeneti valószínűség számolásához ki kell átlagolni a kezdeti m_i vetületekre és összegezni a végállapotbeli vetületekre. Ezáltal az átmeneti valószínűség a

$$T(\sigma l) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{k^{2l+1}}{\hbar} B(\sigma l) \quad (5.36)$$

alakra hozható, ahol

$$B(\sigma l) = \frac{1}{2J_k + 1} \sum_{m_k, m_v} |\langle \Psi_v | \mathcal{O}_{lm} | \Psi_k \rangle|^2 \quad (5.37)$$

a redukált mátrixelem, és teljesülni kell az $m = m_v - m_k$ impulzusmomentum komponens megmaradási szabálynak. A σl jelölés az E1, M1, E2, M2, stb. sugárzási fajtákra utal.

A mátrixelemek egy nagyon durva becslése, amikor a gömbfüggvényeket és az impulzusmomentum vektorokat (spin, pályaimpulzusmomentum, giromágneses faktor) 1-el helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy a hullámfüggvények a mag R sugarán kívül eltűnnek. Ekkor

$$\langle \Psi_v | Q_{lm} | \Psi_k \rangle \approx Ze R^l, \quad \langle \Psi_v | M_{lm} | \Psi_k \rangle \approx A\mu_0 R^{l-1}, \quad (5.38)$$

ahol $\mu_0 = e\hbar/2Mc$ (M a nukleon tömege). Mivel $Z \approx A/2$, ezért azonos rendben a mágneses és az elektromos mátrixelem aránya

$$\frac{\langle \Psi_v | M_{lm} | \Psi_k \rangle}{\langle \Psi_v | Q_{lm} | \Psi_k \rangle} \approx \frac{\hbar}{McR}, \quad (5.39)$$

ami a magmérettől függően egy 0.2 és 0.03 közötti érték. Mivel az (5.29) átmeneti valószínűség ennek a négyzetét tartalmazza, ezért azonos rendben a mágneses átmenet erőssége két-három nagyságrenddel kisebb az elektromos átmeneténél. Hasonlóan belátható, hogy az (5.33) elektromos operátorban elhanyagolt második tag nagyságrendje $A\mu_0 k R^l$, és így aránya az első taghoz $\hbar\omega/Mc^2$, azaz az általunk vizsgált 10-20 MeV-s fotonok esetén valóban igen kicsi a járuléka.

Hasonlóképpen, az azonos típusú sugárzásokban az egymást követő rendek aránya $(kr/2l+3)^2$, és mivel fennáll a $kR \ll 1$ feltétel, ezért, amennyiben valami nem zárja ki, a legalacsonyabb impulzusmomentumú átmenet fog dominálni.

Azt, hogy egy adott átmenet megvalósulhat-e, a kiválasztási szabályok döntenek el. Az impulzusmomentum megmaradása miatt érvényesnek kell lenni az impulzusmomentum összeadási szabályoknak a mag kezdeti- és végállapotára, valamint a sugárzás l perdületére vonatkozóan, azaz,

$$J_k + J_v \geq l \geq |J_k - J_v|. \quad (5.40)$$

Az elektromágneses kölcsönhatásban a paritás is megmarad, ezért a *teljes* kezdeti és végállapotok (beleértve a sugárzást is most) paritásának meg kell egyeznie. Mint az (5.25)-ben láttuk, az elektromos mező paritása $(-1)^{l+1}$, míg a mágnesesé $(-1)^l$. Mivel a kölcsönhatási Hamilton függvényben ezek meg vannak szorozva az árral, mely tértükrözésre előjelet vált, ezért az *átmenetek* paritása

$$Q_{lm} \sim (-1)^l, \quad M_{lm} \sim (-1)^{l+1}. \quad (5.41)$$

Speciálisan, az E2, M1, E4, M3, stb. paritása pozitív, az E1, M2, E3, M4, stb. paritása negatív. Azok az átmenetek vannak megengedve, ahol a mag kezdeti- és végállapota paritásának, valamint a sugárzási tér paritásának szorzata +1. Az 5.1 táblázatban foglaltuk össze a domináns sugárzási módusokat.

ΔJ	$\Pi_k \Pi_v$	multipól
$0 \rightarrow 0$		(E0, M0) tiltott
$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	+	(E0) M1
$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	-	E1
0	+	(E0) M1 E2
0	-	(E0) E1 M2
1	+	M1 [E2]
1	-	E1 [M2]
2	+	E2 [M3]
2	-	M2 [E3]
3	+	M3 [E4]
3	-	E3 [M4]

5.1. táblázat: A mag átmeneteihez tartozó legalacsonyabb multipólusú elektromágneses sugárzások fajtái. A szögletes zárójelben levők nem valósulnak meg, amikor vagy a kezdeti-, vagy a végállapot spinje 0, a kerek zárójelben levő átmenet tiltott.

Speciálisan, a $0 \rightarrow 0$ átmenet csak az $l = 0$ nem létező monopólsugárzással

valósulhatna meg. A paritásváltással járó, impulzusmomentumot nem változtató átmenet megvalósulhat E1, valamint M2 sugárzással is. Az előbbi becslésünk alapján ezek aránya kétszeresen is kicsi, így az E1 dominál. A helyzet bonyolultabb a paritásőrző esetben, ilyenkor az M1/E2 arány

$$\left(\frac{McR}{\hbar} \frac{\hbar\omega}{Mc^2}\right)^2 = \left(\frac{R\hbar\omega}{\hbar c}\right)^2 \quad (5.42)$$

ami a legtöbb esetben egy egységnyi szám, ami egy jelentős móduskeveredésre utal.

Mint láttuk, a $0 \rightarrow 0$ átmenet tiltott, ennek ellenére megfigyeltek ilyeneket. A trükk, ahogyan a mag megoldja ezt a fajta energialeadást, hogy felhasználja az atomhoz tartozó elektronokat, azok egyikének adva át az energiáját és impulzusmomentumát. Mivel a magból kilépő foton energiája igen nagy az elektron kötési energiájához képest, a kölcsönhatásban részt vevő elektron távozik az atomból (konverziós elektron). Egy másik folyamat lehetséges folyamat nagy energiájú fotonok esetén, hogy egy elektron-pozitron párat keltenek. Az ilyen folyamatok nagy energián erősebbek a konverziónál.

További megvalósulási mód a magasabb rendű folyamatok: a két, vagy több foton csere. Ezek a folyamatok a magasabb multipólokon keresztül valósulnak meg, és ennek következtében erősségük igen gyorsan csökken, de ha a fő folyamat tiltott, akkor észlelhető a hatásuk. Ez érvényes nem csak a $0 \rightarrow 0$ átmenetre, de tetszőleges átmenetre. Ilyen értelemben beszélünk első-, másod-, stb. rendben tiltott átmenetéről. Az $0 \rightarrow 0$ folyamat például első rendben tiltott, de létrejöhét két szimultán E1 folyamattal (paritásmegmaradás esetén). Ha ez sem valósulhat meg valamiért, akkor a folyamat már másodrendben is tiltott, és magasabb multipólusú párhuzamos sugárzások eredőjeként jöhet létre.

Visszalökődés

Az eddigiekben nem számoltunk a mag visszalökődésével. A kimenő foton impulzust is visz magával, és fenn kell állnia a

$$E_k - E_v = \Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + E_\gamma, \quad Mv = E_\gamma/c \quad (5.43)$$

energia- és impulzusmegmaradásnak, azaz a ΔE energiaszint különbség és a kilépő foton energiáját a

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (5.44)$$

kifejezés köti össze. Mivel tipikusan $E_\gamma \ll Mc^2$,

$$E_\gamma \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}, \quad (5.45)$$

pl. $E_\gamma = 10$ MeV esetén a korrekció $\Delta E/E = 5 \cdot 10^{-3}$, elég kicsi, és a legtöbb esetben el is hanyagolható. Precíziós mérések esetén azonban ezzel az effektussal számolni kell.

A visszalökődésnek van egy másik hatása is, nevezetesen, hogy megváltoztatja a mag $e\vec{p}/m$ áramait az impulzus megváltozása miatt. Amennyiben az elektromágneses kölcsönhatás csak a töltött részecskéekkel, vagy azok egy csoportjával (pl. csak egy protonnal) hat kölcsön, akkor a visszalökődés miatt ez exrta áramot indukál a kölcsönhatásban eredetileg részt nem vevő részecskékből is. A jelenség egyszerűen figyelembe vehető az elektromos töltés korrekciójával. Ez a korrekció azonban függ attól, hogy milyen folyamatról van szó, a legjelentősebb az elektromos dipól esetén, amikor

$$e' = e \left(1 - \frac{Z_*}{A} \right), \quad (5.46)$$

ahol Z_* a kölcsönhatásban részt vevő csoport töltése. Ez a korrekció kis magok esetében E1 átmenetre játszhat számottevő szerepet, a többi átmenetre a hatása csekély.

Mössbauer effektus

Mint láttuk, a visszalökődés miatt a kilépő foton energiája nem egyezik meg teljesen a magátmenet energiájával, hanem annál valamivel kisebb. Hasonlóképpen elnyelődés esetén a bejövő foton energiájának valamivel nagyobbak kell lenni a magátmenet energiájánál,

$$E_\gamma \approx \Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}. \quad (5.47)$$

A bomlási jelleg miatt azonban tudjuk, hogy az átmenetnek szélessége is van, a mérhető hatáskeresztmetszetet a

$$\sigma(E) \sim \frac{(\Gamma_0/2)^2}{(E - E_0)^2 + (\Gamma_0/2)^2} \quad (5.48)$$

Lorentz görbe jellemzi, ahol a Γ_0 szélesség alacsonyan fekvő energiaszintek esetén tipikusan $10^{-6} \dots 10^{-3}$ eV (ami $10^{-12} \dots 10^{-9}$ s bomlási időnek felel meg).

A görbe szélességét módosítja a hőmozgás miatti Doppler eltolódás is. A v sebességgel visszalökődő mag kinetikus energiája

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} M(v + v_T)^2 = E_R + E_D + E_T, \\ E_R &= \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}, \quad E_D = Mvv_T, \quad E_T = \frac{1}{2} Mv_T^2, \end{aligned} \quad (5.49)$$

ahol v_T a (termális) hőmozgás sebessége. A visszalökődési energiája (5.44) alapján, $E_R = E_\gamma^2/2Mc^2$, ezért az E_D Doppler energia kifejezhető

$$\Delta = \langle E_D \rangle = E_\gamma \sqrt{\frac{2\langle E_T \rangle}{Mc^2}} = E_\gamma \sqrt{\frac{3T}{Mc^2}} \quad (5.50)$$

alakban, és a sugárzás mért szélessége ezzel a termikus energiával megnő, $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta$, ahol $\Gamma_0 = \hbar/\tau$, τ az állapot bomlásideje.

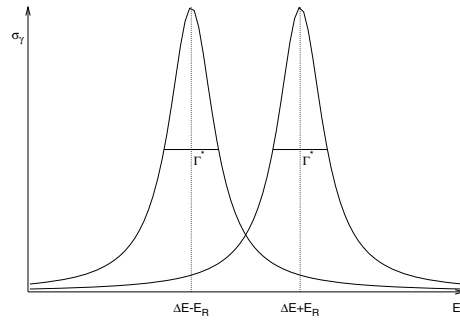
Becsüljük meg a termikus kiszélesedés értékét szobahőmérsékleten, kb. 300 K fokon, egy 1 MeV-os foton esetén. Mivel $1 \text{ eV} \approx 11000 \text{ K}$, ezért

$$\Delta(T = 300K) = 1 \text{ MeV} \sqrt{\frac{3300/11000 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}}{1000 \text{ MeV}}} \approx 10 \text{ eV}, \quad (5.51)$$

azaz a termikus kiszélesedés messze meghaladhatja a bomló állapot szélességét, de alatta marad a visszalökődés 1 keV-os energiaeltolásánál. A vizsgált anyag hűtésével a termikus kiszélesedés tetszés szerint csökkenthető.

Az elnyelődés tanulmányozásának legegyszerűbb módszere így egy folytonosan hangolható energiájú fotonnyaláb útjába tenni a vizsgált anyagot, és mérni az abszorpciót. A mért görbe kirajzolja a hatáskeresztmetszet Lorentz görbáját, ahonnan leolvasható az átmenet energiája (korrigálva a visszalökődési energiával), valamint a szélessége (korrigálva a termikus kiszélesedéssel). Az ilyen fotonforrásokra szinkrotronokat alkalmaznak, és a fékeződési (szinkrotron) sugárzás használják fel.

Igen gyakran azonban nem áll rendelkezésre szinkrotron, ilyenkor egy γ sugárzó anyagot kell keresnie. Ezeknek azonban a sugárzási spektruma diszkrét, és igen kicsi az esélye, hogy a kibocsátott foton energiája a vizsgált anyag elnyelődési energiájának közelében legyen, kivéve, ha ugyanazt az anyagot használjuk foton kibocsájtásra, mint elnyelésre. Ugyanakkor, ilyenkor sem ideális a helyzet, ugyanis a visszalökődés miatt a kibocsájtott foton energiája $E_\gamma - E_R$, míg az optimális elnyeléshez szükséges energia, szintén a visszalökődés miatt $E_\gamma + E_R$,



5.2. ábra. Fotonok kibocsájtási (bal) és elnyelési (jobb) hatáskeresztmetszete.

ezáltal, mint azt az 5.2 ábra mutatja, az átfedési tartomány, ahol a kibocsájtott foton magreakciót válthat ki, elég kicsi.

A problémára két megoldás is létezik. Az egyik, hogy hasonlóan a termális energiához, használjuk ki a Doppler effektust, és a céltárgy mozgásával növeljük meg a bejövő foton energiáját. Az (5.50) alapján ilyenkor a Doppler effektus

$$E_D = E_\gamma \frac{v}{c} \quad (5.52)$$

energiával növeli meg a foton energiáját, ahol v a mozgás sebessége. 1 keV korrekciójához azonban 1 MeV-os fotonenergia esetén igen nagy, $v/c \sim 0.001$ sebesség szükséges. Ezt úgy próbálták megvalósítani, hogy a céltárgyat egy igen gyorsan forgó rotorra helyezték.

Az igazi megoldást 1958-ban Mössbauer találta meg. Mivel a visszalökődés energiája függ a visszalökődő részecske tömegétől, E_R jelentősen csökkenthető, ha valahogy megnöveljük a visszalökődő részecske tömegét. Erre ideális a kristályrács, melybe „erősen” berögzítjük a vizsgálandó magot, és ezáltal a visszalökődés energiáját az egész kristályrács veszi át, melynek tömege az atomtömegnél nagyságrendekkel nagyobb. Ehhez a kristályrácsot le kell hűteni, és ez egyben lecsökkenti a termikus kiszélesedést is. Ezt a módszert az előbbi a céltárgy mozgásán alapuló Doppler effektussal kombinálva esetek zömében már néhány cm/s sebesség elegendő ahhoz, hogy az 5.2 ábra két görbéje fedésbe jöjjön, és ezért egy igen elterjedt kísérleti módszer lett.

A módszert sikerrel alkalmazták a gravitációs vöröseltolódás mérésére: a forrást (a foton kibocsájtó anyagot) négyszor 10 m-rel magasabbra helyezték, mint a céltárgyat, és megmérték, hogy mennyivel tolódott el az energia (azaz mennyivel kisebb sebességgel kapták meg az elnyelődés maximumát), mint abban az

esetben, ha a forrás és a céltárgy egy magasságban voltak! Hasonlóképpen lehet mérni a kémiai környezet hatását a mag jellemzőire.

5.3. α bomlás

Sok nehéz elem spontán módon bomlik α (${}^4\text{He}$) részecskék kisugárzásával. A bomlásidő igen széles tartományban mozog, a μs töredékétől néhány milliárd évig. A visszamaradó maradékmag is igen sokszor bomlik, akár a 3.1.3 fejezetben ismertett sor tagjaként, vagy β és γ sugárzásokkal, amíg stabil izotópot nem kapunk. A bomlás azért mehet végbe, mivel az α részecskének igen nagy a kötési energiája (28 MeV). A folyamat energiamérlege

$$Q_\alpha = B(Z - 2, A - 4) + B(2, 4) - B(Z, A), \quad (5.53)$$

ahol $B(Z, A)$ a Z rendszámú és A tömegszámú mag kötési energiája. $Q_\alpha > 0$ esetén az energimérleg pozitív, és a folyamat végbemehet. Behelyettesítve a kötési energiába a (3.10) Weizsäcker féle félempírikus energiakifejezést, adódik, hogy

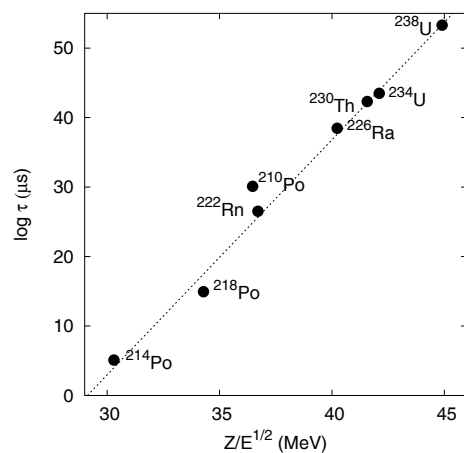
$$A \gtrsim 140 \quad (5.54)$$

esetén mehetne végbe a spontán α bomlás. Azonban az energia egy része a maradékmag visszalökődés miatti kinetikus energiáját fedezi, más részét pedig a gerjesztési energia viheti el, ha a maradékmag nem alapállapotba kerül. További probléma a 4.5 ábrán felvázolt Coulomb gát leküzdése, mely néhány MeV többletenergiát feltételez a folyamat spontán lezajlásához. Ennek hiányában az α részecske alagúteffektussal is távozhat a magból, ez azonban igen lassú, ha Q_α messze van a Coulomb gát magasságától. A kísérletileg megfigyelt bomlásidők, és α részecske energiák közötti összefüggést,

$$\log \tau = A' \log E - B' \approx A \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} - B \quad (5.55)$$

az α részecskék a Coulomb gáton át történő alagutazásával meg lehetett érteni. Itt A és B két, a potenciál magasságától és szélességétől függő szám. Az első kifejezés a Geiger-Nutal törvény, míg a második a Coulomb potenciálon alagutazás elméleti számolásából adódik. Mivel az α bomlás elég szűk Z és E tartományban történik, a két egyenlet igen jól egyezik az α bomló magokra. Ezt illusztrálja az 5.3 ábra. Mivel alagutazás esetén E_α kisebb, mint a potenciálgát magassága,

ezért a hullámfüggvény exponenciális cseng le a gátban, és a kijutási valószínűség (a bomlásidő inverze) igen érzékeny az α részecske energiájára. Innen ered a már említett széles bomlásidő tartomány.



5.3. ábra. Az (5.55) elméleti összefüggés (szaggatott vonal) és a kísérleti értékek (pontok).

6. fejezet

Hasadás és fúzió

A magok egy részecskére jutó átlagos kötési energiáját jól leíró (3.10) Weizsäcker féle félempirikus energiakifejezésnek szélsőértéke van a vas körüli elemeknél, 8.6 MeV/részecske értéknél. Könnyebb elemeknél a felületi energia, nagyobbaknál a Coulomb kölcsönhatás csökkenti a kötési energiát. Ennek alapján energetikailag a könnyű magok egyesülése (fúzió) és a nehéz magok kisebbekre szétesése (hasadás) várható.

Mint azt az 5.3 fejezetben, az α bomlásnál láttuk, ezt az egyszerű becslést a Coulomb gát módosítja: könnyű magok esetén a két részecskének meg kell közelítenie egymást magfizikai távolságra (~ 1 fm), és eközben megfelelő energiával kell rendelkezniük a Coulomb taszítás legyőzésére. Ugyanez zajlódik visszafelé a hasadásnál, a kirepülő maradványmagoknak előbb le kell küzdeniük a Coulomb gátat, mielőtt szabadon távozhatnának.

6.1. Maghasadás

A Coulomb gát magassága urán körüli elemeknél 200 MeV tartományban van, azaz a maradékmagoknak (fragmenseknek) is ekkora kinetikus energiával kell rendelkezniük. Mivel a Coulomb gát széles is a nehéz magokban, az alagúteffektushoz is körülbelül ekkora energia szükséges. Ez az energia túl nagy ahhoz, hogy rendelkezésre álljon a magban, ezért egy olyan mechanizmus után kell néznünk, mely kisebb energiával is megoldja a hasadást.

Először vizsgáljuk meg a (4.1) Weizsäcker formula és 4.1 táblázat alapján, hogy mi a feltétele annak, hogy egy A tömegszámú és Z rendszámú atommag

elbomoljon két $A/2$ tömegszámú és $Z/2$ rendszámú fragmensre,

$$\begin{aligned}\Delta E &= 2E(A/2, Z/2) - E(A, Z) \\ &= (2^{1/3} - 1) c_2 A^{2/3} - \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) c_4 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \\ &= A^{2/3} \left[(2^{1/3} - 1) c_2 - \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) c_4 x \right] < 0.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Ez akkor teljesül, ha

$$x = \frac{Z^2}{A} \gtrsim 17.5, \quad A \gtrsim 95, \quad (6.2)$$

ahol felhasználtuk a stabil magok rendszámát kifejező (4.3) kifejezést. Ez az érték igen messze van a természetben megfigyelhető $A \gtrsim 240$ tömegszámoktól. Az ok a Coulomb gát.

A 4.1.3 fejezetben, a kollektív modelleknél tárgyaltuk a magdeformációkat. A nagy tömegszámú magok már nem gömbszimmetrikusak, és egy gerjesztés növelheti a deformációt. A deformáció során növekszik a felületi, és csökken a Coulomb energia, így elég nagy magoknál az utóbbi hatás dominálhat, és spontán hasadás alakulhat ki olyan módon, hogy a deformáció növekedésével a Coulomb gát folytonosan eltűnik. Ennek feltétele kiszámolható a felület (4.7) paraméterezése alapján. A legalacsonyabb gerjeszthető módus az $l = 2$ kvadrupól, és ennek legalacsonyabb járuléka az energiához (ld. Függelék)

$$\Delta E = \Delta E_F + \Delta E_C = \frac{4}{45} \alpha_2^2 \left(2c_2 A^{2/3} - c_4 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right). \quad (6.3)$$

Az energia csökken (a kötési energia növekszik), ha

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{Z^2}{A} \Big|_{\text{krit}} = \frac{2c_2}{c_4} \sim 50, \quad (6.4)$$

azaz $A \gtrsim 400$. A pontosabb számolás figyelembe veszi a deformációban (α_2) magasabb rendű tagokat is, aminek eredményeképp az energiaváltozás az α_2 függvényében $A \lesssim 400$ magokra először pozitív, majd negatív. Ennek eredményeképpen kezdetben a deformáció növelése energiát igényel, azonban egy kritikus deformáció fölött már energiát szabadít fel. Azt az energiát, mely ahhoz szükséges, hogy elérjük a kritikus deformációt hasadási energiának nevezzük. Ez az energia jóval

kisebb, mint egy gömbszimmetrikus mag hasadásakor a Coulomb gát leküzdéséhez szükséges energia.

A hasadási energiát sokféleképpen közölhetjük a maggal, például, lassú neutronokkal bombázzuk. Azonban arra nincs garancia, hogy a gerjesztett mag hasadással bomlik, sok lehetséges bomlási csatorna vetélkedhet egymással: rugalmas neutron szórás, γ sugárzás, α kibocsájtás, rugalmatlan szórások, a hasadás csak egy közülük. Ha a hasadási energia kicsi, akkor még az egyéb bomlási csatornák viszonylag kevesen vannak, és nagy valószínűséggel maghasadás jön létre, de 7-8 MeV hasadási energia fölött a mag már inkább más bomlási módot választ ki. Tipikus példa erre a platina, melynek még csak nem is túl magas a hasadási energiája, de gyorsabban veszti el energiáját foton kisugárásával.

Maghasadás során a keletkezett leánymagok jelentős neutrontöbblettel rendelkeznek a (4.3) formula következtében, ezért a hasadás után igen gyorsan (10^{-15} s-en belül) neutron lép ki a maradékmagokból, amit általában még foton kilépés is követ. Azonban ezek a magok még mindig neutrondúsak, és ezen β bomlással próbálnak változtatni, amit újabb neutronkibocsájtás követhet. Mivel a β bomlás elég lassú, ez a második neutronhullám néhány másodperc - perc idővel a hasadás után jelentkezik. Az első fázisban megjelenő neutronokat prompt neutronnak, a második fázisban keletkezőket késő neutronoknak nevezzük. Ez utóbbiakban, bár kevesen vannak, igen lényeges szerepük van az atomreaktorok szabályozhatóságában. A másik lényeges információ a hasadásakor kilépő neutronok átlagos száma, mely néhány magra

^{230}Th	^{230}U	^{240}Pu	^{254}Cr	^{254}Fm
1.24 ± 0.15	2.30 ± 0.20	2.23 ± 0.05	3.90 ± 0.14	4.05 ± 0.19

6.1. táblázat: Hasadásakor kilépő neutronok átlagos száma.

A magok hasadhatnak spontán és gerjesztett módon. A hasadás felezési ideje a kísérletek szerint exponenciálisan függ az Z^2/A paramétertől, és függ az A tömegszámától. Az $A \gtrsim 256$ -os magok már rendkívül könnyen hasadnak, az $A \lesssim 240$ -es magok viszonylag lassan, és a fő bomlási forma már inkább az α bomlás.

39. ábra ... spontán hasadás felezési ideje.

A gerjesztett hasadás akkor következik be, ha az atommagot előtte valamilyen módon gerjesztjük, pl. termikus neutronok besugárzásával. A hasadási energia ilyenkor a neutron kinetikus energiájának és a neutron szeparációs energiájának

összege,

$$E_h = S_n + \epsilon_n. \quad (6.5)$$

A következő táblázat tartalmazza néhány magra ezeket az energiákat.

Mag	²³⁰ Th	²³² Th	²³⁵ U	²³⁸ U	²³⁸ Np	²³⁸ Pn	²⁵⁶ Mv
E_h	4.8	6.4	4.8	5.9	4.3	3.5	2.5
S_n	6.4	5.2	6.4	5.1	6.4	5.5	5.5
ϵ_n	0	1.2	0	0.3	0	0	0

6.2. táblázat: Néhány mag hasadási, a gerjesztési neutron szeparációs és kinetikus energiája MeV egységekben.

6.1.1. Hasadási termékek

Hasadáskor a mag két vagy három nagyobb részre eshet szét. Ez utóbbi folyamat igen kis valószínűségű ($p \sim 10^{-4}$), a hasadások zöme két leánmagot és egy α részecskét eredményez. A hasadási termékek lehetnek szimmetrikusak és antiszimmetrikusan. Szimmetrikus hasadásnál két, körülbelül egyforma maradékmag keletkezik. Ez a folyamat dominál a nem túl nehéz magok bomlásakor. Nehezebb magok inkább két antiszimmetrikusan hasadnak, a két fragmens nagyon eltérő tömegszámú. Ezek közül a nehezebb tömegszáma $A \sim 135$, míg a könnyebb ennek megfelelően változik. A két típus a ²²⁶Ra környékén vált, melyben egyforma valószínűségű a szimmetrikus és az antiszimmetrikus bomlás.

6.2. Reaktorok

Az atomreaktorban az előzőekben ismertetett lánreakciót tartják fent szabályozott módon: tipikusan az ²³⁵U hasadása során kilépő neutronok viszik tovább az indukált hasadást. Mivel a természetes uránban elég kevés ²³⁵U (főleg az urán 238-as izotópjából áll) ezért a reaktorba kerülő uránt dúsítani kell (tömegcentrifugával: az urán ionokat elektromos térrel felgyorsítva, mágneses térbe helyezve, azok a Q/m arány – töltés/tömeg – alapján különböző sugarú körpályára állnak, ezért a megfelelő helyen elhelyezett „gyűjtő”vel megnöveljük az adott tömegű izotópok arányát).

A hasadásban kilépő neutronokat többféle veszteség éri:

- kilépnek a reaktor felületén, nem okozva hasadást;
- a hasadó anyag között jelenlevő nem hasadó anyagban fogódnak be;
- a hasadó anyagban fogódnak be, de nem idéznek elő hasadást;

és végül egy részük hasadást gerjeszt. Másik probléma a kilépő neutronok energiája, mely túl magas ahhoz, hogy hatékonyan hasítsa a többi magot (az ^{235}U hasadási hatáskeresztmetszet csak termikus neutronokra nagy). Ehhez a neutronokat le kell lassítani (moderálni). A moderátorral szembeni elvárások:

- jó (hatékony) lassító legyen. Egy gyors részecskét a leghatékonyabban egy vele egyenlő tömegű részecske lassítja le, ezért az ideális moderátor a hidrogén. De
- biztonságos legyen (a H_2 könnyen berobban): ezt orvosolhatjuk azzal, hogy vizet alkalmazunk, a benne levő hidrogén atomok fogják lassítani a neutron. De
- lassítsa a neutron, de ne fogja be. A sima H hajlamos befogni a lelassított neutron deutériummá (tríciummá) alakulva. Ennek elkerülésére célszerű már eleve nehézvizet (D_2O -t) alkalmazni.

Moderálásra még használnak grafitot is (a szénatom még viszonylag könnyű részecskének számít). A moderálás hátulütője, hogy a ^{238}U viszont elnyeli a termikus neutronokat, rontva a hatékonyságot.

A cél, hogy a reaktor reaktivitását egy értéken tartsuk. Ezt az jelenti, hogy egy hasadás során kiszabadult neutronokból pontosan egy fog befogódni a reaktortérben, és előidézni egy hasadást, ezáltal pontosan szinten tartva a reakciót. Amennyiben a reaktivitás 1 alá csökken, (exponenciálisan) egyre kevesebb neutron fog hasadást előidézeni, és a reaktor leállt. Ha a reaktivitás 1 fölé nő, akkor (exponenciálisan) egyre több neutron idéz elő hasadást, és a reaktor megszalad. (A reaktorok kifejlesztése során, hogy ne legyen feltűnő, a tudósok az USA-ban 1 dolláros reaktorról beszéltek 1 reaktivitás helyett).

A nagy gond az időskálákkal van, mivel a maghasadás magfizikai folyamat, tipikus reakcióideje 10^{-23} másodperc. Ez azt jelenti, hogy ha csak egy kicsit is eltér 1-től a reaktivitás, akkor nagyon gyorsan lecseng / növekszik a hasadások száma. Az emberi reakcióidő alatt (0.1 másodperc) a hasadások száma $e^{10^{22}(r-1)}$ alakba változik, ami már a reaktivitás (r) nagyon kis eltérése esetén is a reaktor leállítását, vagy felrobbanását eredményezi az emberi reakció idő (a helyzet az

automatikus vezérlés sem segít, annak a tipikus időskálája is sokkal nagyobb a magfizikai időskálánál).

A helyzete a késő neutronok mentik meg. A magfizikai folyamatokat a későbbiekben gyenge kölcsönhatásos bomlások is követik (neutron konverziója protonná), melyek időállandója már lényegesen nagyobb, akár néhány másodperces is lehet. A késő neutronok kevesen vannak, az ^{235}U esetén átlagosan 2.5 neutron lép ki, és ebből 0.018 késő (7%). De ez már elengedő ahhoz, hogy a késő neutronok nélkül a reaktivitás 1 alatt tartsuk, és a késő neutronok járuléka vigye a reaktivitás 1 közelébe, ahol szabályozni tudjuk a reaktor reaktivitását.

A különbözõ hasadó izotópokhoz *kritikus tömeg* tartozik. A kritikus tömeg az a (legkisebb) anyagmennyiség, amivel a láncreakció önfenntartó lesz. Kevés anyag esetén nagy a felület, és sok neutron szökik ki a rendszerbõl, és nem tud további hasadásokat kiváltani. A kritikus tömeg ezért függ a

- a hasadóanyag fajtájától: hány neutron szabadul fel a hasadás során (több neutron esetében kisebb a kritikus tömeg, mivel más kisebb anyagcsomóban is maradhat annyi neutron, hogy továbbvigye a hasadást);
- a hasadóanyag geometriai elhelyezkedésétõl: egységnyi anyag a legkisebb felülettel gömb alakban helyezkedik el, a gömbnek a legkisebb a kritikus tömege. Ezt használják ki az atombombánál, a gömbre vonatkoztatott kritikus tömegnyi anyagot több gömbben tárolják, ahol a megnövekedett felület miatt nem alakul ki önfenntartó folyamat, robbantáskor ezeket az anyagdarabokat egy gömbbé lövik össze, ahol már beindul a láncreakció. Ugyancsak csökkenthetõ a kritikus tömeg, ha a felületen kimenõ neutronok egy részét sikerült visszafordítani: ezt tipikusan a hasadóanyag köré tett vékony berillium réteggel érik el.

Anyag	kritikus tömeg
^{233}U	15 kg
^{235}U	50 kg
^{239}Pu	10 kg
^{247}Pu	7 kg

6.3. táblázat. Néhány anyag kritikus tömege. A ^{239}Pu berillium reflektorral van megadva, anélkül 10.5 kg. Forrás: http://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mass.

6.3. Atombomba

Atombomba előállításakor az éppen kritikus tömeg nem elegendő, mivel nehéz összetartani egyszerre az egész hasadóanyagot. Egy 1.1 kritikus tömegű bomba 10-20 tonna ekvivalens, egy 1.2 kritikus tömegű 100 tonna, míg egy 1.35 kritikus tömeggel rendelkező 250 hagyományos bombának felel meg. Ez utóbbi viszont már elegendő egy fúziós bomba beindításához is. A 6.3 táblázat alapján látszik, hogy az atombomba töltetkezéskor célszerű Pu izotópot választani, mivel abból kisebb tömegű is elég. A Pu izotópokat a katonai reaktorokban állítják elő, ahol a Pu koncentrációja kb. az üzemeltetés 3. hónapjában a legnagyobb, így a reaktor leállításával a Pu centrifugával kinyerhető. A polgári reaktorokat éppen ezért szokták egy évre „lezárni”, mivel 1 év működés után a Pu kinyerése már gazdaságtalan.

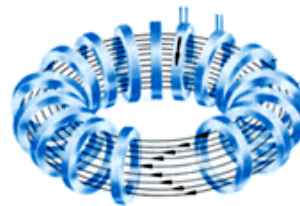
A 20 tonnás bomba kb. 300 m sugáron belül halálos sugáradagot eredményez (1350 rem), míg 400 m-en a félhalálos adat (500) rem jelenik meg. (Forrás: <http://nuclearweaponarchive.org/News/DoSuitcaseNukesExist.html>)

6.4. Magfúzió

ld. Napban zajló folyamatok

Tokamak

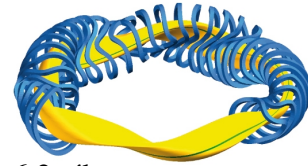
A fúzióhoz szükséges hőmérsékletet egy anyag sem viseli el, ezért a forró plazma adott helyen tartásához mágneses teret használnak. Az ötlet az akkori Szovjetunióból származott, innen az orosz elnevezése, a Tokamak, ami a tórusz alakú kamra mágneses tekercsekkel orosz rövidítése. Az alapötlet, hogy magas hőmérsékleten a hidrogén atom és izotópjai ionizálódnak, és ezért egy töltött plazma alakul ki. Ezt a töltött plazmát elektromos térrel begyorsítják, és a tórusz körül kialakított mágneses térrel a tóruszon belül tartják. A technológiával rövid kísérletekkel már elérték a fúziót, de a legnagyobb probléma a stabilitás, az ún. plazma instabilitás. Ennek lényege, hogy a rendszerben fellépő erők olyanok, hogyha a plazma egy helyen a fluktuációk miatt kicsit elvékonyodik, akkor a fellépő erők tovább vékonyítják a plazmát, míg az végül elszakad, és leáll a fúzió. A jelenlegi kutatások ezt a plazma instabilitást próbálják kiküszöbölni. Az Európai Unió ITER néven közösen fejleszti a jövő fúziós reaktorát.



6.1. ábra. Tokamak elrendezése (forrás: Wikipedia).

Stellátor

A stellator (nevét a Napról kapta) az USA Tokamaktól független fejlesztése, hasonló alapelvvel, de más, bonyolultabb geometriával. A kezdeti lelkesedés után ennél is kiderült, hogy nagyon gyors a plazmaveszteség, és abbahagyták a kutatást a tokamak megismerésével. A tokamat plazmainstabilitása miatt azonban az 1990-es évektől újra visszajött a koncepció, mivel a számítógépes szimuláció elérte azt a szintet, hogy előre megtervezett mágneses térrel rendelkező berendezéseket lehessen gyártani. Mivel a stellátorban nem áramlik a plazma, ezért a plazmainstabilitások egy része nem lép fel, cserébe a plazma összetartása sokkal rafináltabb mágneses terek alkalmazását kívánja meg.



6.2. ábra. stellátor elrendezése: kékek a mágnesek, sárga a plazma, és zöld csík a mágneses tér erővonalai (forrás: Wikipedia).

Begyűjtás

Ebben a technológiában a deutériumból és tríciumból álló keveréket robbantanak be. A keverék hűtött állapotban, jégréteggént egy arany (újabbban ^{238}U) cm nagyságrendű tartályban helyezkedik el, ahol erős lézerekkel (a NIF-ben 192 db.) kb. $80\ \mu\text{m}$ sugarú gömbbő nyomják őket össze (ilyenkor kb. vízsűrűségű anyag keletkezik). Az összenyomás hatására a keverék felmelegszik, és a közepén, egy kb. $3\ \mu\text{m}$ sugarú gömbben fúzió zajlik le. Ilyen kutatás az USA-ban zajlik, National Ignition Facility-ben (NIF), a Livermore National Laboratory-ban, ahol naponta legfeljebb egy lövést tudnak lebonyolítani, melynek során az arany (U) tartály is teljesen megsemmisül. A berendezés nemrég (2010 évek közepe) érte el, hogy energiamérlege pozitív lett, de még messze 1% alatt van a hatékonysága. A jelenlegi fejlesztés arra irányul, hogy ennek a begyűjtött résznek a térfogatát jelentősen megnöveljék. A fő probléma itt is a mechanikai instabilitás (Rayleigh instabilitás), melynek során az egyenetlenül felforrosodó anyagban a nagyobb hőmérsékletű hamarabb berobban, nem hagyva időt a többi résznek a felmelegedésre. Egy magyar találmány azt javasolja, hogy a cseppbe bejuttatott arany nanogömbök rezonátorként fel tudják erősíteni a lézer hatását, és mechanikai helyett sugárzási melegítéssel hevítik fel a keveréket. A sugárzási melegítés kiegyenlíti a hőmérséklet eloszlását, és a számítások szerint ezzel meg lehet tízszeresíteni az aktív térfogatot.

Függelék: A deformáció energiaviszonyai

$$R(\theta) = R_0 (1 + \alpha_2 P_2(\cos \theta)) \quad (6.6)$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \quad (6.7)$$

Az új felület az érintő irányú elemi ívelem segítségével számolható,

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int d \cos \theta R(\theta)^2 \sqrt{1 + (R(\theta)' / R_0)^2} \quad (6.8) \\ &= 2\pi R_0^2 \int_{-1}^1 dx \left(1 + \alpha_2 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \right)^2 \sqrt{1 + 9\alpha_2^2 x^2} \\ &\approx F_0 \left(1 + \frac{17}{10} \alpha_2^2 + \frac{6}{5} \alpha_2^3 - \frac{87}{56} \alpha_2^4 + \mathcal{O}(\alpha_2^5) \right) \end{aligned}$$

7. fejezet

Nehézion fizika

7.1. Közepes energia

BUU

$$\left(\partial_t + \dot{\vec{r}} \vec{\nabla}_r + \dot{\vec{p}} \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2} \int d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 W(p_1, p_2; p'_1, p'_2) \quad (7.1)$$
$$\times \{ [1 - f(p_1)][1 - f(p_2)]f(p'_1)f(p'_2) - f(p_1)f(p_2)[1 - f(p'_1)][1 - f(p'_2)] \}$$

Alapesetben nincsen potenciál, így $\vec{p} = 0$. Ez egyben a Liouville tétel általánosítása is ...

1938-ban Vlasov észreveszi, hogy a Coulomb gáz esetére bonyolult, és pontatlan az egyenlet megoldása, ezért azt mondja, hogy az ütközési tag hatását egy átlagpotenciállal, átlagtérrel vegyük figyelembe,

$$\left(\partial_t + \frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla} V \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0 \quad (7.2)$$

végül a BUU (Boltzmann-Uehling-Uehlenbeck) egyenlet az figyelembe veszi a "sima" átlagteret, és a "kemény" ütközésekért felelős szórási tagot is,

$$\left(\partial_t + \frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla} V \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2} \int d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 W(p_1, p_2; p'_1, p'_2) \quad (7.3)$$
$$\times \{ [1 - f(p_1)][1 - f(p_2)]f(p'_1)f(p'_2) - f(p_1)f(p_2)[1 - f(p'_1)][1 - f(p'_2)] \}$$

hidro: a VUU egyenlet kiintegrálása az impulzus szerint, megmaradási tételek (anyagáram, energiaáram).

7.2. Relativisztikus ütközések

7.3. Az anyag új fázisai

8. fejezet

Nukleáris asztrofizika

8.1. Csillagfejlődés

8.1.1. Viriál tétel

A viriál tétel a Newton egyenletekből levezethető:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (mx^2) = mx \frac{d^2 x}{dt^2} + m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$
$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (m\mathbf{r}^2) = m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}\mathbf{F}.$$

Minden tömegpontra összegezve, és felhasználva, hogy $I = \sum m_i \mathbf{r}_i^2$ a tehetetlenségi nyomaték és $K = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$, a kinetikus energia:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2K + \sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i.$$

Ha az erő gravitációs erő, akkor a viriál:

$$\text{viriál} = \sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i = \sum_{ij} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \Omega$$

azaz

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2K + \Omega.$$

Ha a rendszer egyensúlyban van, I nem változik, $2K + \Omega = 0$. Ez a viriál tétel.

Alkalmazás ideális gázokra

Ideális gáz esetén egy részecske átlagos kinetikus energiája $\frac{3}{2}kT$. Egy adott dm tömegben dN molekula van, így ennek kinetikus energiája:

$$dK = \frac{3}{2}kTdN = \frac{3}{2}RTdm = \frac{3}{2}(\gamma - 1)c_vTdm, \quad (\gamma = \frac{c_p}{c_v}), \quad (8.1)$$

és $k = 8.3 \cdot 10^{-24}$ cal/fok.

A gáz belső energiája $E = c_vTdm$, így a kinetikus energia és belső energia kapcsolata: $K = \frac{3}{2}(\gamma - 1)E$, ahol (egyatomos) ideális gázra $\gamma = \frac{5}{3}$, $K = E$. A teljes energia $U = E + \Omega$.

- Egyensúly esetén a viriál tétel alapján $2K = -\Omega$, tehát

$$\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega, \quad E = -\frac{\Omega}{3(\gamma - 1)} \quad (8.2)$$

$$\begin{array}{ll} \text{a) Ideális gázra} & U = \frac{1}{2}\Omega, \quad E = -\frac{1}{2}\Omega, \\ \text{b) Degenerált gázra} & \gamma = \frac{4}{3}, \quad U = 0, \quad E = -\Omega. \end{array}$$

- Ha a rendszer kontrahálódik, $2K + \Omega < 0$, így $2K < |\Omega|$.

Egyenletes anyageloszlásra $\Omega = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$, ekkor ideális gázra

$$K = E = \frac{3}{2}k\bar{T}N = \frac{3}{2}k\bar{T}\frac{M}{\mu m}. \quad (8.3)$$

A kontrakció feltétele ezek szerint

$$3k\bar{T}\frac{M}{\mu m} < \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \quad k\bar{T} < \frac{1}{5}\frac{GM}{r}\mu m. \quad (8.4)$$

Bevezetve a sugár helyett a sűrűséget ($\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$), a kontrakció feltétele:

$$M > 1.2 \cdot 10^{-10} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{3}{2}}\bar{\rho}^{\frac{1}{2}}}. \quad (8.5)$$

Konklúziók:

- Intergalaktikus anyagra $\mu \sim 1$, a galaktikák kialakulása idején $T = 10^4 K$ volt, $\rho = 10^{28} \frac{g}{cm^3}$, így $M > 1.2 \cdot 10^{10}$, azaz ez az egyszerű megfontolás jól adja a galaxisok tömegét.

- Egyensúly esetén $T = 4.1 \cdot 10^6 \mu M \bar{\rho}^{\frac{1}{2}} (K^o)$ azaz növekvő tömeggel nő a hőmérséklet.

Degenerált rendszerek

Degenerált rendszerre a részecskék kinetikus energiája a sűrűséggel lesz arányos:

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{E}{A} = \frac{3}{5} E_F \quad (8.6)$$

Ultrarelativisztikus esetre $E = pc$ miatt $p_{FC} \sim \rho^{\frac{1}{3}}$, $\frac{E}{A} = \frac{3}{4} E_F$.

Egy rendszer akkor válik degenerálttá, ha a hőmérsékleti energiája sokkal kisebb a Fermi energiánál, azaz ha $kT \ll E_F$. Degenerált rendszerek fontos tulajdonsága, hogy alapállapotban levén nem tudnak sugározni.

Teljesen ionizált hidrogén gázban a protonok sűrűsége, így fermi impulzusuk is megegyezik az elektronokéval, a kinetikus energiájuk ezerszer kisebb. Az elektrongáz hamarabb degenerálódik, mint a protongáz.

Relativisztikus elektrongáz esetén az egyensúly feltétele $\frac{3}{4} N_e \hbar c (3\pi^2 \rho_e)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$, ahol $N_e = \frac{M}{\mu M_H}$, $\rho_e = \frac{N_e}{V}$. Ez maximálisan kb. $1.2 - 1.4 M$ tömeget jelent. Ezt hívják Chandrasekhar határnak.

8.1.2. A Nap energiatermelése

Gravitáció során az eddig felszabadult energia a Napban: $W = -\frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} + \frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_0}$.

A sugárzás ideje $t = \frac{W}{2\bar{L}_0}$, ahol \bar{L}_0 az átlagosan 1 sec alatt kisugárzott energia. A Napra az adatok: $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{33} g$, $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^{10} cm$, $L_{\odot} = 3.86 \cdot 10^{32} \frac{erg}{s}$ és ha $\bar{L}_0 = \frac{L_0}{10}$ -et veszünk, $t = 2 \cdot 10^8$ év. A Föld kora $5 \cdot 10^9$ év, tehát ennél jóval hosszabb.

A magreakciókban felszabadult energiával kifejezve $\frac{\Delta M c^2}{L_0} = t$. $t = 5 \cdot 10^9 s$ és $L_0 = L_{max}$ értékekkel $\Delta M = 5 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ adódik, azaz a Nap tömegének csak 0.05%-a sugárzódott ki. Ha a csillag tömegének 10%-a égeti a hidrogént, annak mintegy fele fogyott el máig. Ha a Nap teljes tömege vas körüli elemekké alakul, a felszabadult energia $\Omega = Q M_{\odot} = 1.6 \cdot 10^{52} erg$, $Q = 8 MeV/nukleon$, ami

mai fényességgel $t = 1.2 \cdot 10^{11}$ évig világítana. Nukleáris energiatermelés nélkül tehát Napunk nem tudna ma világítani, de könnyű elemek fúziójából elegendő energia áll rendelkezésre.

8.1.3. A csillagokban lezajló magreakciók

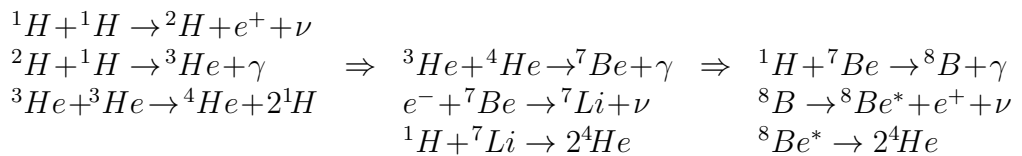
Kérdés, milyen magreakciók mehetnek végbe a csillagokban? $T = 10^7$ K hőmérsékleten

- Proton lánc

Folyamat	Felszabaduló energia (MeV)	Idő
${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	1.44	$14 \cdot 10^9$ év
${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.49	6 sec
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2 {}^1\text{H}$	12.85	10^6 év

$$E_{pp} = 26.2 \text{ MeV}, \quad E_\nu = 0.26 \text{ MeV}/\nu.$$

- Berillium-bór lánc



- Katalizátoros magreakció

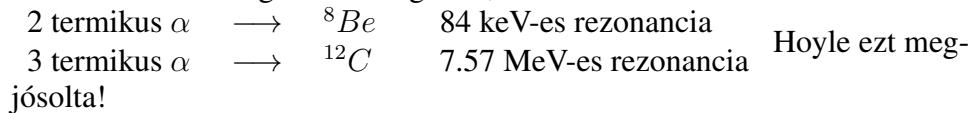
Folyamat	Felszabaduló energia (MeV)	Idő
${}^{12}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$	1.95	$1.3 \cdot 10^7$ év
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	2.22	7 perc
${}^{13}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma$	7.59	$2.7 \cdot 10^6$ év
${}^{14}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$	7.35	$3.2 \cdot 10^8$ év
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	2.71	82 sec
${}^{15}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{12}\text{C} + {}^4\text{He}$	4.96	$1.1 \cdot 10^5$ év

$$E_C = 25.2 \text{ MeV}, \quad E_\nu = 0.72 \text{ MeV}/\nu.$$

- *Nehezebb elemek kialakulása*

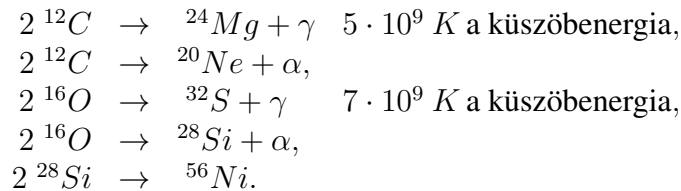


A ^8Be gyorsan elbomlik, de ha azalatt míg létezik a mag, befog egy α -t, $T = 10^8\ \text{K}$ -nek megfelelő energiánál, ^{12}C alakulhat ki.



Magasabb hőmérsékleten α és β befogás, esetleg β bomlás: az elemek lassan kialakulnak a vasig.

- *További fontos magreakciók*

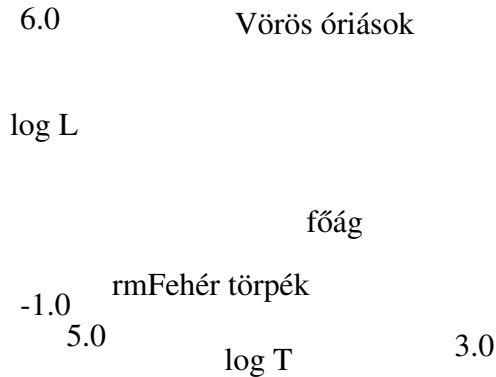


8.1.4. A csillagfejlődés menete

Az ismert csillagokat hőmérsékletük és kisugárzott energiájuk függvényében egy síkon ábrázolhatjuk: ez az ún. Hertzsprung-Russel diagram.

A legtöbb csillag egy vastag meghatározott vonalon található: ezeket a csillagokat nevezik főág menti csillagoknak. Ezenkívül még két tartományban találhatóak nagyobb számban csillagok: a vörös óriás ill. a fehér törpe tartományban. A diagram többi részén viszonylag kevés csillag helyezkedik el. A H-R diagram megérthető a csillagfejlődés lefolyásának ismeretében. A következőkben röviden ennek a főbb vonásait tekintjük át.

A csillagok fejlődésének kezdeti szakaszában még nem elég magas ahhoz a hőmérséklet, hogy magreakciók végbemenjenek. Ilyenkor a kicsit meleg csillag sugárzási energia veszteségét csak a kontrakció során felszabaduló gravitációs

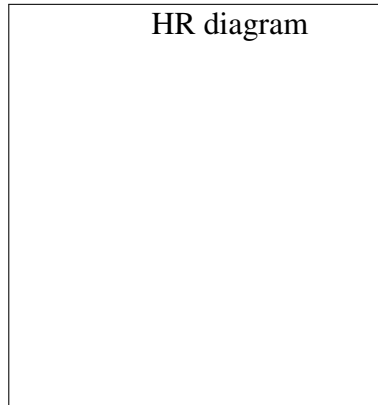


8.1. ábra. .

energia pótolja. A viriál tétel értelmében a kontrakció során a felszabadult energia fele a csillag hőmérsékletét növeli. A megnőtt hőmérsékletű gáz nyomása képes csak a növekvő gravitációs nyomást ellensúlyozni. Ahogy nő a hőmérséklet, nő a kisugárzott energia, így az azt fedező kontrakció is gyorsul. Ha a hőmérsékletet eléri a 10^7 K-ot, a csillagok közepében beindulnak a magreakciók.

A kezdeti kontrakciós stádiumban a csillag összehúzódik, így az effektív hőmérséklete növekszik. A kisugárzott energia mennyisége függ attól, hogy milyen mechanizmus juttatja a felszabadult energiát a felületre: sugárzás vagy konvektív vezetés, azaz a csillaganyag egyes részeinek mozgása. A konvektív vezetés hatásosabb, ilyenkor a csillag több energiát sugároz ki, mint sugárzási vezetésnél. Kezdeti stádiumban a csillagok konvektívak, azután sugárzóvá válnak, a csillag tömegétől függően. A csillag a jobb felső vagy középső sarokból a bal alsó vagy középső rész felé vándorol, tömegétől függően bejut a főágba. A következő ábrán ezek a folyamatok láthatóak.

A ${}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ égés lassan megy végbe a csillagokban. Mialatt a kisugárzott energia a magreakciók során felszabadult energiával pótlódik, gravitációs kontrakcióra nincs szükség, a csillag hőmérséklete és a kisugárzott energiamennyiség állandó, a csillag a HR diagramon a helyén marad. A hidrogént égető csillagok alkotják a főágot. A főágban azért van olyan sok csillag, mert ez a csillagfejlődés leghosszabb szakasza. Nap nagyságú csillagok 10^{10} évig égetik a közepén levő hidrogén készletüket, 10-szer nagyobb csillagoknál a kontrakció során a hőmér-



8.2. ábra. .

séklet magasabb lett, ezért ezekben egy-másfél nagyságrenddel gyorsabban zajlik le a hidrogénégés, de minden csillagnál ez a folyamat 1-3 nagyságrenddel tovább tart, mint a fejlődés bármelyik másik szakasza.

Ha a csillag közepén a hidrogénkészlet kimerült, a csillag energiaveszteségét megint csak gravitációs kontrakcióval tudja pótolni. A kontrakció során megint emelkedik a centrális hőmérséklet. Ha a csillag hőmérséklete eléri a 10^8 K-t, a hélium égető reakciók is beindulnak. Ismételt gravitációs kontrakció, illetve magreakciók révén a csillag eljuthat egy olyan stádiumba, amikor a közepén levő elemek mind vas körüli elemek. Újabb magreakció ekkor már nem jelent energianyereséget, ugyanakkor a csillag hőmérséklete $10^9 - 10^{10}$ K körülivé válik. A csillag elérkezett egy olyan fejlődési ponthoz, amikor a békés fejlődést jelentő egyensúlyi elvek nem tudnak érvényesülni; valami katasztrófa kell, hogy bekövetkezzen.

8.1.5. A csillagfejlődés végállapotai

Fehér törpék kialakulása

Nem minden csillag jut el abba a stádiumba, amikor a csillagtörzsben levő elemek mind vas körüli elemek: kicsi csillagokat ebben megakadályozhat a csillaganyagban levő degenerált elektrongáz.

Az elektrongáz szerepével eddig nem túlságosan sokat foglalkoztunk a csillagfejlődés során. Nyilvánvaló azonban, hogy az elektrongáz szerepe a gáznyomás kialakulásánál nagy, hiszen a nyomás $1/m$ -mel arányos. Ahogy a protonok egyre

nehezebb elemekké tömörülnek, a barionokból álló részek száma csökken, míg az elektronok száma változatlan marad, azaz az elektronok szerepe a nyomás kialakulásánál egyre jelentősebb.

Egy rendszer akkor válik teljesen degenerálttá, ha egy bizonyos küszöbérték alatt minden állapot be van töltve a rendszerben. Minél kisebb egy részecske, a kvantummechanikai határozatlansági reláció értelmében annál nagyobb az impulzus bizonytalansága, azaz annál nagyobb a fáziscella, amit elfoglal. Egy ideális és egy degenerált gáz nyomása akkor lesz egyenlő, ha

$$p = \frac{k}{m} \rho T = c_1 \frac{\rho^{\frac{5}{3}}}{m^{\frac{8}{3}}},$$

azaz

$$\rho \sim m^{\frac{5}{2}}.$$

Minél kisebb a részecske tömege, annál kisebb az a sűrűségérték, ahol a gáz degenerálttá válik. Egy degenerált gáz nyomása és így belső energiája nem a hőmérséklettől függ, hanem a sűrűségtől. Vagyis ha az elektrongáz degenerálódott, a gravitációs kontrakció nem a hőmérsékletet növeli, hanem a nyomást. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor újabb magreakciók beindítására nem lesz a hőmérséklet elég nagy.

Az elmondottak alapján világos a kis csillagok fejlődésének a végállapota. Ha a csillag kicsi, a gravitációs kontrakció során hamar degenerálttá válik az elektrongáz, további magreakció ilyenkor nem következik be, a rendszer lassan zsugorodik. A zsugorodás csak egy kritikus értékig tarthat, a gáznyomás a további kontrakciót megakadályozza. Mivel további energiefel szabadító folyamatok nem mennek végbe a csillag lassan lehül. A degenerált gáz sugárzása jóval kevésbé intenzív, mint az ideális gázé, a sugárzás során elektronátmenetek nem következhetnek be, mert az elektronpályák mind be vannak töltve. Ezek a kicsi, fehér, lassan pislákoló égitestek a fehér törpék.

Ahogy a csillagban középén kifogy a hidrogénanyag, a külső rétegek a közép felé kontrahálódnak, miközben megnő a csillag hőmérséklete és nagy lesz a sugárnyomás. A nagy sugárnyomás felfújja a csillagot, nagy méretű lesz, miközben a külső rétegek hőmérséklete lecsökken. Az ilyen csillagok a sok energiát kisugárzó, de kis felületi vagy effektív hőmérsékletű vörös vagy fehér óriások, amelyek a HR diagram jobb felső sarkában helyezkednek el. Ha további magre-

akciók nem indulnak be, a csillag összezsugorodik, azaz a felületi hőmérséklete a nagy sűrűsége miatt megnő, nincsenek hideg felületi zónák, ugyanakkor a kisugárzott energia lecsökken, a csillag fehér törpévé válik. A fehér törpék a HR diagram bal alsó sarkában helyezkednek el.

Körülbelül az $M < 10 M_{\odot}$ könnyű csillagok válnak fehér törpévé, azaz jelenlegi tudásunk szerint a Nap is egyszer fehér törpe lesz majd. Körülbelül 5 milliárd évig tart még a Napban a centrális hélium égés, ezalatt a Föld átlaghőmérséklete legfeljebb 20°C -ot növekszik. Ezután gravitációs kontrakció következik be majd, amelynek során a Föld átlaghőmérséklete becslések szerint 800°C -ra emelkedik, majd kb. 10-100 millió évig tart a külsőbb rétegek hidrogénjének ill. a centrális héliumnak az égése. Valószínűleg további magreakciók nem indulnak be a Napban, a Nap (és a Föld légköre is) lassan kihűl, egyikévé válik a jelentéktelen és nagy számú fehér törpéknek.

A körülbelül tízszeres Naptömegnél nagyobb csillagok közepe mai elméletünk szerint teljesen vagy részlegesen vassá alakulhat át. További energianyereség most már magreakciók révén nem lehetséges, a hatalmas, 10^9 fok hőmérsékletnek megfelelő kisugárzott energiát csak a gravitációs kontrakció fedezheti. A legkülső rétegek ilyenkor szinte szabadon esnek a csillag belseje felé, minden egyensúly felborul. A külső rétegek még könnyű elemekből állnak, ezek a forró centrumba beérkezve magátalakulásokban vesznek részt. A korábban milliárd évekig tartó folyamatok itt pillanatok alatt bekövetkeznek, és hihetetlen nagy energiamennyiség szabadul fel. A rendkívül nagyenergiájú részecskék és fotonok a legkülönbözőbb magreakciókban vesznek részt; minden lehetséges izotóp kialakul. Ez az a műhely, ahol a nehéz elemek keletkeznek.

Most már két energiafogyasztó mechanizmus is van a csillagban: a nehéz elemek kialakulása és a sugárzás. További gravitációs kontrakció következik be. A középpontban hatalmas mennyiségű nagyenergiájú neutrínó, antineutrínó sugárzás keletkezik, elsősorban párkeltés révén. Ezek a külső rétegekben elnyelődnek, energiájukat átadják az anyagnak. A nagy mennyiségű kivitt energia hatására a csillag felrobban. Ezt a folyamatot nevezik szupernova robbanásnak.

Szupernova-robbanás során a csillagnak akár 80-90 %-a is kirepülhet a világűrbe. A visszamaradó csillag maganyag sűrűségű rendszer, ami elsősorban neutronokból áll. Az elektronok kinetikus energiája ugyanis a Pauli elv értelmében olyan nagy, hogy energetikailag kedvezőbb egy elektronnak és protonnak

neutron állapotba menni át. A neutroncsillagban neutronok protonná, protonok neutronná alakulnak át, így a fellépő neutrínók miatt a csillagok hamar elvesztik hőenergiájuk nagy részét és 10^5 K alá hűlnek le, és nem tudjuk őket direkt módon megfigyelni. Mivel az utóbbi években megfigyelt pulzáló rádiócsillagok (pulzárók) valójában neutron csillagok, közvetett módon megfigyelhetők.

Ha a neutroncsillag tömege egy kritikus méret alatt van, a csillaganyag nyomása és a gravitációs nyomás egyensúlyt tart; a csillag stabilis. A neutroncsillag a csillagfejlődés egy másik végállapota. A kritikus méret meghatározása nehéz feladat, függ a nagy sűrűségű nukleonok között ható erőktől, a neutrínó kilépések gyakoriságától, stb. A kritikus méret 1-3 Naptömeg között változik a számításoktól függően. Ez azt jelenti, hogy akár 10-25 Naptömeg nagyságú csillagok végállapota még mindig neutroncsillag. Egy dolog azonban világos: van egy olyan kritikus méret, aminél nagyobb csillagnak nincs stabilis végállapota, a csillag menthetetlenül egyre jobban kontrahálódik, míg gravitációs sugarán belül kerül. A csillagfejlődés ezen harmadik végállapotairól, a fekete lukakról fotonok révén nem nyerhetünk információt, ugyanis az elektromágneses sugárzás útja olyan görbült, hogy ezek nem tudnak a fekete lukból kijönni. Ezeket a csillagokat legfeljebb csak nagy gravitációs terük segítségével figyelhetjük meg.

Szupernova robbanás

A szupernova robbanás az Univerzum leglátványosabb jelensége. A kibocsátott energia a robbanás során $\sim 10^{52}$ erg, aminek a sugárzások (minden hullámhossztartományban) csak kb. 1%-t viszik el. Ennél tízszer nagyobb a szétvetett anyag kinetikus energiája, és százszor nagyobb a neutrínók által elvitt energia. A robbanás során felszabadult energia fényesebbé tehet egy csillagot, mint az egész galaktika. Néhány hónap alatt a felrobbant csillag több fényt sugároz ki, mint a Nap öt milliárd év alatt. Évente mintegy 10 szupernova robbanást figyelnek meg a környező galaxisokban. A Tejútrendszerben valószínűleg 50 évente van egy robbanás, ennek mi csak kis részét tudjuk megfigyelni. Nagyon fontos az 1054-ben kínai csillagászok által megfigyelt Rák-köd robbanása. Mintegy 10000 évvel ezelőtt robbant a Vela, ami egy második Nap fényességű objektum megjelenését jelentette.

A szupernova robbanásokat két nagy csoportra osztják, I. és II. típusú robbanás csoportjaiba. Ezeknek több alcsoportja van. Az eredeti megkülönböztetés onnan adódott, hogy az I. típusú szupernovákban nem volt található hidrogén vo-

nal, míg a II. típusban igen. Ma már tudjuk, hogy a fejlődésük egészen más.

I.a típusú szupernova

Eredetileg binér rendszerben létező fehér törpe. A csillag magához vonz a partnertől anyagot, és eközben tömege a kritikus tömeg fölé nő (a kritikus érték $1.4 M_{\odot}$, az a tömeg amivel egy degenerált elektrongáz egyensúlyt képes tartani). Amikor ez bekövetkezik, gravitációs kontrakció megy végbe, a csillag anyaga rendkívüli mértékben felmelegszik, felmelegedés során vas körüli elemek alakulnak ki, utána lassan robban a rendszer (detonáció, nem explozió). Robbanás után csillag egész anyaga szétmegy, nem marad vissza neutroncsillag. Fehér törpében nincs hidrogén, érthető hogy H színeképvonal sincs. A csillag felülete kicsi, nagyon fényes a robbanás, egy nagyságrenddel fényesebb, mint a II. típusé. Az I. típusú szupernova robbanások 80%-a ilyen, 20% sok más alcsoportra oszlik, ezekről most nem beszélünk. Az I.a típusú szupernova robbanások távolság mérésére alkalmazhatóak.

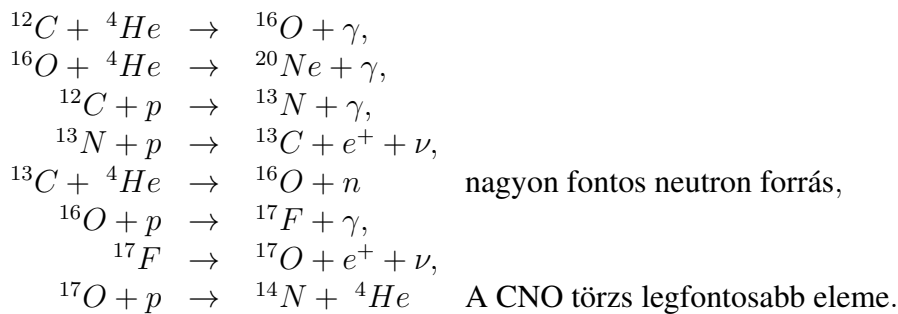
II. típusú szupernova

Sokkal drámaibb, és fizikailag is érdekesebb. Három részre tagolható folyamat: *preszupernova kialakulása, kollapszus és robbanás.*

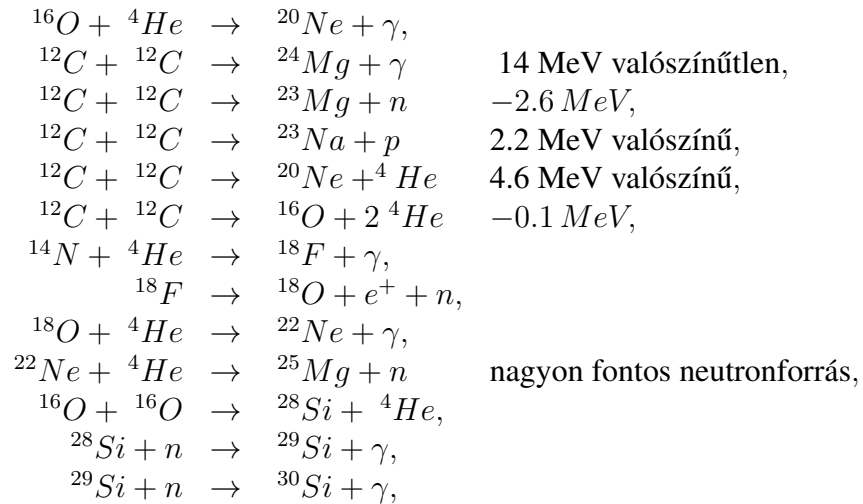
a) Preszupernova fejlődés, elemek kialakulása

Ha a csillag elég nagy volt ahhoz, hogy a törzse úgy alakulhasson át vas körüli elemekké, hogy közben az elektrongáz nem degenerálódik, a csillag zavartalanul fejlődhet, újabb héjakat égetve, vas körüli atommagokká. H égéssel szemben fontos különbség, hogy most a neutronok és protonok száma durván megegyezik. Ez nagyon meggyorsítja a magreakciókat.

Legfontosabb magreakciók amik lejátszódnak:

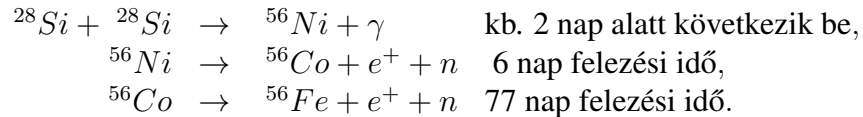


További égések a felszabaduló energiával:



de ugyanakkor Si könnyen elbomlik könnyebb elemekre He, n, p kibocsátásával. Ezeket a maradék Si-k befogják, és kialakul az ${}^{56}\text{Ni}$.

Robbanó Si égésnél, ami az összeroskadó héj mögött közvetlenül szomszédos rétegben megy végbe, kialakulhat közvetlenül is:



Nehéz elemek kialakulása

s-folyamat

Neutronok találhatóak csillagban, ezek probléma nélkül befogódnak magokba. A befogás után béta bomlás is bekövetkezhet, ennek révén a csillagfejlődés utolsó stádiumában, amikor már a vas körüli magokon fogódik be a neutron, kialakul az összes nehéz elem. Ezt a folyamatot nevezik s folyamatnak (lassú, *slow n* befogás)

r-folyamat

A robbanó folyamatokban nagy neutron sűrűséget kapunk, hiszen itt neutrondús magok szétesnek. Ekkor neutron gazdag stabil izotópok alakulnak ki, héjszerkezetet is figyelembe véve, hiszen a mágikus neutronszámú magok kialakulásának

valószínűsége nagy. Meteoritekből lehet következtetni valószínűségekre, nagyon jó egyezések, pl. urán körüli elemekre.

Preszupernovában a helyzet nem kaotikus, a rendszer a nagyobb rend felé halad. H csillagban minden rész tetszőlegesen mozoghat, egy nukleonre eső entrópia 15. Vastörzsben 56 nukleon együtt mozog, entrópia 1. Különbséget neutrínók és fotonok vitték el.

b) Kollapszus

Amikor a csillag törzse vas körüli elemekből áll, további fúziós energia nyereség nem lehet, gravitációs kontrakció történik. 18-20 M_{\odot} tömegű kezdeti csillagnál a vastörzs 1.4 M_{\odot} körüli tömegű, törzs nyomás nem tud egyensúlyt tartani gravitációs nyomással (Chandrasekhar limit kb. 0.7 M_{\odot}), 0.1 sec alatt kollapszus. Gravitáció miatt a törzs felmelegszik, de ez nem csökkenti kollapszust, sőt ellenkezőleg. Ok: A törzs nyomását elsősorban az elektronok száma és energiája szabja meg. Kollapszuskor a vasmagok kis része feltörik, amihez energia kell, ezáltal csökken részecskék átlagenergiája. Másrészt $p + e^{-}$ neutronná alakul, neutrínók lépnek ki, ezek elvisznek energiát, és csökken a relativisztikus elektron-szám. Mindez még elősegíti kollapszust.

Az elektron befogódás folytatódhatna, ha a neutrínók tetszés szerint kimehetnének a törzsből. Ha a törzs sűrűsége $4 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^3}$ lesz, a neutrínók bennragadnak az anyagban, szóródnak a magokon. Amikor a rendszer sűrűsége eléri a $2 \cdot 10^{12} \frac{g}{cm^3}$ -t, az elektronokon is szóródnak. Ezután elektronok száma sem csökken, egyensúly áll be. Az elektronok nukleonokhoz való aránya egyensúlyban kb. 0.39.

A kollapszus első része véget ér.

Az összehúzódás még tart tovább, de elektron szám már nem csökken. Kollapszus második része akkor ér véget, amikor sűrűség eléri a maganyag néhányszorosát. Magok ilyenkor szétolvadnak, maganyag keletkezik. Anyag nem tud tovább összenyomódni, ellenállás keletkezik, ez végül lökéshullámot jelent. A lökéshullám meghatározásához fontos a maganyag állapotegyenlete, azaz a $P(\rho)$ függvény meghatározása. Az állapotegyenlet magfizikai ismeretekből alapállapotban:

$$\frac{E}{A} = \alpha \rho^{\frac{2}{3}} - \beta \rho + \gamma \rho^{\sigma+1}.$$

Ebből adott hőmérsékleten meghatározható $P(\rho, T)$

További sűrűségnövekedéssel szemben ez akkor taszító, ha

$$P \sim \rho \frac{d^2 E}{d\rho^2}, \quad \frac{dP}{d\rho} < 0, \quad \frac{2}{9} \alpha \rho^{\frac{2}{3}} > \sigma(\sigma + 1) \gamma \rho^{\sigma+1}.$$

c) Robbanás

Amikor az anyagsűrűség maganyagénál nagyobb, és nem nyomható tovább össze, a nyomás megnő, és a befele esés sebessége leáll. Nyomáshullámok terjednek kifelé, egészen a törzs széléig. Felület közelében lelassulnak, mert szembe találkoznak beeső anyaggal, majd megállnak, és az újabb hullámok elérik az elsőköt, nyomást okozva. Nyomás csökkenti anyag beesését. Hullámfront mögött anyag sűrűsége nagyobb lesz, mint hullám által el nem ért térrészben, adiabatikusan összenyomott állapotba kerül, megnő a hőmérséklete, nagyobb a nyomás mint hullám előtt. Később induló hullámok nyomása még nagyobb, egyre jobban utóléri korábbi nyomáshullámokat, hullámfront meredekké válik, sebességben szakadás következik be: lökéshullám keletkezett.

Lökéshullám a vastörzs közepében, kb. $0.7 M_{\odot}$ -nál keletkezik.

Nyomáshullám nem okoz állandó változást a közegben, lökéshullám igen. Nagy változás sűrűségben stb., viszi ki magával anyagot. Sebességet nem a közeg határozza meg, mint hanghullámnál, hanem hullám energiája. Lökéshullám $30 - 50\,000 \frac{km}{s}$ sebességgel halad kifelé. Prompt lökéshullám nem jut ki csillag felületére, már a törzs felületére érve elveszti energiáját, lelassul. Ok: a magok disszociációja, energiát visz el, hőmérséklet és nyomás csökken. Ekkor $p + n \rightarrow e^+ + \nu$ folyamat is fellép, kisebb sűrűségben neutrínók már kimehetnek, ez is elvisz energiát. A nyomáshullám 300-500 km-ig kijut csillaganyagba. Mai nézet szerint lökéshullámot a neutrínók indítják újra.

Visszamaradt neutroncsillag hihetetlen nagy energiájú, energiáját neutrínók viszik el. Ezek nagyrészt kijutnak rendszerből, de kb 100 km-re a centrumtól még minden ezredik ütközik az anyaggal, nagy energiát adva át az atommagoknak. Nagy entrópiát adnak át a rendszernek, kisebb entrópiát kicsi, nagy entrópiát gradiens konvekciót okoz, meleg anyag kiáramlik. Ez a kiáramló anyag a lökésfrontnak nagy energiát ad át.

500-3000 km között lökés felmelegíti anyagot, robbanásos magreakciók keletkeznek, itt jön létre az ^{56}Ni . 3000 km után már szabadon kijut a lökés a felületre, és magával víve a nagy energiát, szétrobbantja csillagot. Szupernova robbanás láthatóvá válik.

d) Az 1987-es szupernova robbanás

A Nagy Magellán Ködben, 160 000 fényévnire, egy $18 M_{\odot}$ -ű kék csillag robbant fel.

Történet:

- Első információt a ν -k hozzák, ν burst, 12 ill. 8-10 sec-on belül (függetlenül energiától \rightarrow 20 eV tömeg),
- Két órával később nem látható, három órával később igen.
- Először intenzív UV, mire megfigyelik, halványodik.
- Lassú felfényesedés láthatóan 2 hónapig, aztán halványodás.
- 5 hónap után megjelenik röntgen és γ sugárzás.
- háló sugárzás korábban kilökött felmelegített burokból.
- 2 év után pulzáló jel, 2000/s, de eltűnik.

Az elméletet igazolja:

- ν kilépése neutron csillag kialakulást bizonyítja. Ennek tömege $1.4 M_{\odot}$, 10^{53} erg energiát visznek el. Ennek a tizede kinetikus, százada fényenergiaként szabadul fel.
- UV sugarak bizonyítják a nagyenergiájú lökeshullámot
- Fényesség gyengülése 77 nap felezési idejű, a



folyamatnak megfelelően.

- Átláthatóság 5500 foknál, rekombináció, nincs e^- amin ν ütközzön.
- Mikorra a külső réteg elvékonyodik, megjelenik röntgen és γ sugárzás, és a többi elem is. Az elemgyakoriság a várt.

Érthetetlen:

- Miért kék óriás a csillag? (Kisebb csillag kevésbé fényes)
- Hol a pulzár? A kialakult neutron csillaggal mi lett?

8.1.6. Neutroncsillag

A szupernova robbanás után visszamaradt csillag neutroncsillag vagy fekete lyuk. A neutroncsillag maximális tömege relativisztikus degenerált rendszer egyenleteiből:

$$m(r) = \int_0^r d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})$$

és az Oppenheimer Volkoff egyenlet (a hidrosztatikai egyensúly relativisztikus általánosítása)

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2})(m(r) + \frac{4\pi r^3}{3} \frac{p(r)}{c^2})}{r^2(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2})},$$

(nem relativisztikus esetre $\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}$).

A csillag hőmérséklete alacsony, ν -k elviszik az energiát.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad p \rightarrow n + e^+ \nu.$$

Az állapotegyenletet kell meghatározni.

A neutroncsillag megfigyelési lehetőségei

a) *Pulzárok*

10^{12} gauss mágneses tér, rotációs és mágneses tengely nem egyezik meg. A mágneses tér irányában kilöködik az anyag: szinkrotron sugárzás.

Megfigyelések:

1. Periódus illetve pulzusidő \rightarrow M és R ebből meghatározható.

2. Lassulási idő (megjósolták)

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\Omega^2, \quad \dot{E}_r = \Omega\Theta\dot{\Omega} = \frac{\Omega^2\Theta}{T}.$$

$T = \frac{\Omega}{\dot{\Omega}}$ a lassulás, Θ a tehetetlenségi nyomaték, Ω a szögsebesség.

Rák-ködre: $\Theta \approx (4.9 \pm 3.9)10^{14} \frac{g}{cm^3}$, $M \approx (1.1 \pm 0.8)M_{\odot}$.

3. Felgyorsulás.

Ok:csillagrendés.

$$\Omega(t) = \Omega(t) + (\Delta\Omega_0)(Qe^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - Q)$$

Belső szerkezetre lehet következtetni.

4. Felgyorsulás gyakorisága: Más a Vela és a Rák-köd esetén.

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx \begin{cases} 10^{-4} & \text{Vela} \\ 10^{-6} & \text{Rák} \end{cases}$$

Szerkezet, belső feszültség más.

b) *Pulzáló kettőscsillagok:*

Her X-1, $M=1.33 M_{\odot}$

Röntgenpulzációs periodus 1.24 s

Binér forgás 1.7 nap, látható a partner mozgásából. Relativisztikus precesszió 35 nap.

Pulzáció oka: anyag beáramlás partnertől, felmelegszi 10 millió fokra.

Röntgen sugárzás.

Az akkréció 15-60-szor annyi energiát szabadít fel, mint a H fúzió. A kvazár energiája is innen van.

Vannak más pulzárok, ahol a beeső anyag felgyorsítja a forgást (600/s).

A fekete lyuk összenyomja a mágneses teret, nem lehet pulzár.

Binér rendszerben lehet röntgen pulzár vagy burst. A pulzár fiatal, nagy tömegű, partnere kék csillag, a másik öreg. Utóbbi lehet szupernova eredménye. Mágneses télerősség különböző. 59 ms pulzár és partner tömege mindegyik kb. $1.4 M_{\odot}$.

Gravitációs hullámokra mérés lehetősége: ismerve a két tömeget, a binér pulzár periódusa 75 mikrosec-mal kell hogy csökkenjen évente. Mérés:

$76 \pm 2 \text{ ms}$. Mérhetőség oka: pulzus periódus (nem orbitális) évente 0.25 ns. 50000-szer kisebb mint a Rák-ködé.

Binér rádió pulzárok is vannak. A partner fehér törpe vagy neutroncsillag, valaha röntgen binér volt, eközben felgyorsult. Van egyedülálló is. 1.56 ms, 10000-szer gyengébb mágneses tér. Partner elszakadt.

8.2. Kozmológia

Newtoni program: mozgásegyenlet és kezdeti feltétel:

$$\frac{d y}{d t} = F(y), \quad y(0) = a.$$

A kezdeti feltétel speciális, ehelyett állandó Univerzum feltevés. A mozgásegyenletek egyensúlyi megoldását kell keresni:

$$F(y_0) = 0, \quad \frac{d y}{d t} = 0.$$

A legfontosabb paradoxonok:

1. Clausius:hőhalál. Minden intenzitásparaméter kiegyenlítődik, kémiai és termodinamikai egyensúly. Ma nincs!
2. Seeliger paradoxon: Ha gravitációs terek, erő, gyorsulás.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho.$$

Az egyenletnek sztatikus megoldása csak $r=0$ esetén van. Még Einstein is keresett ilyet.

8.2.1. A modern kozmológia kezdetei

1. Friedman: mozgásegyenletnek nincs sztatikus megoldása. Vagy összehúzódik, vagy tágul az Univerzum.

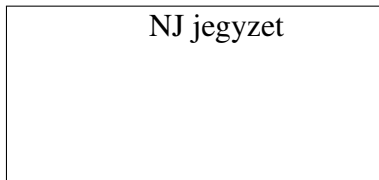
2. 1929. Hubble törvény: az Univerzum minden irányban egyenletesen tágul. (A tágulás megoldja hőhalál problémát)
3. Fekete test sugárzás. $T=2.75$ K-nak megfelelő háttérsugárzás van. Meglepően egyenletes.

1. és 2. következménye:

Tegyük fel egy homogen izotróp Univerzum létezését (nagy skálán ez igaz). Ekkor

$$x(t) = sR(t), \quad v(t) = s\dot{R}(t).$$

s állandó vetített távolság



$$v(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}x(t) = H(t)x(t), \\ H(t_{max}) = H_0.$$

Hubble törvény:

$$v = H_0 r.$$

Távolodás során vöröseltolódás. A Wien féle eltolódási törvény szerint :

$$\lambda_{max} \sim T^{-1},$$

de az előzőekből

$$\lambda \sim R(t)$$

és így a hőmérséklet

$$T \sim R(t)^{-1}.$$

Doppler effektus van a távolodás miatt, a hullámhossz változik:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = z, \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

itt λ_e a kibocsátott hullámhossz, λ_0 a mért t_0 időben.

A z Doppler eltolás arányos távolsággal. Ebből az Univerzum kora meghatározható. Amikor távolságok zérusok, az R skálafaktor zérus:

$$H_0 = \frac{9.78}{h} 10^9 \text{év}, \quad t = H_0, \quad 0.4 \leq h \leq 1.$$

A fekete test sugárzás energiasűrűsége :

$$\rho(t) = aT^4.$$

A hőmérséklet, mint láttuk $T \sim R(t)^{-1}$ így a sugárzás energiasűrűsége:

$$\rho_s \sim R(t)^{-4},$$

míg az anyagé:

$$\rho_b \sim R(t)^{-3}.$$

Ma jóval kisebb sugárzás sűrűsége, mint anyagé, valaha nagyobb volt. A korai időszakban a sugárzás dominált.

8.2.2. A newtoni Univerzum fejlődése

A gravitációs erő

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho.$$

A teljes energia

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} - \frac{1}{2}mr^2[H(t)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho] \stackrel{\leq}{>} 0.$$

Az energia negatív illetve pozitív értéke meghatározza az Univerzum tágulását. A kritikus sűrűség :

$$\rho_{krit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \sim (4 - 16) \cdot 10^{-27} \frac{kg}{cm^3},$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{krit}}.$$

($\rho_{krit} = 5 \frac{H_{atom}}{m^3}$, nagyon jó vákuumban $2 \cdot 10^{11} \frac{molekula}{m^3}$).

Az energia átírható sebesség korábbi definíciójával. Bevezetve a $k = -\frac{2E_{tot}}{ms^2}$ kifejezést:

$$k = R(t)^2 \left[\frac{8\pi}{3} G\rho(t) - H^2(t) \right],$$

azaz m -től és x -től független egyenletet kapunk. Ha $k=0$, a differenciál egyenlet könnyen megoldható. Ha az anyagsűrűség dominál:

$$\begin{aligned} \rho &\sim R^3, & \frac{\dot{R}^2}{R^2} &= \frac{8\pi}{3} G\rho, & \dot{R}^2 &\sim \frac{1}{R}, & R(t) &\sim t^{\frac{2}{3}}, \\ H(t) &= \frac{2}{3}t, & \implies \tau &= \frac{3}{2}H_0, \end{aligned}$$

és megkaptuk $R(t)$ időfüggését.

Sugárzásos esetben az egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} \rho &\sim R^{-4}, & \frac{\dot{R}^2}{R^2} &\sim R^{-4}, & R(t) &\sim t^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} &= -4\frac{\dot{R}}{R} \sim \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho_s}, & \rho_s(t) &= aT^4, & \rho_s &\sim \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

és a hőmérsélet időfüggése

$$T(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}.$$

Az Univerzum tágulása lassul, ahogy az előzőkből látható.

Az energiasűrűség $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$ és így a $V(t) = V_0 R^3(t)$ térfogatban az energia:

$$E(t) \sim \rho(t)V(t).$$

A tágulás során a rendszer munkát végez:

$$dE = -pdV, \quad E = -3\frac{\dot{R}}{R}\rho(t)V(t).$$

Ebből megkaphatjuk egy ideális gázra a sűrűség változását:

$$\begin{aligned} \rho dV + V d\rho &= -pdV, \\ \dot{\rho} &= -(\rho + p)\frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R}, \\ \dot{\rho} &= -3\frac{\dot{R}}{R}, \end{aligned}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2,$$

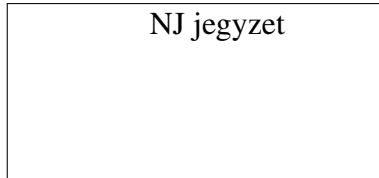
$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi}{3}G(\dot{\rho}R^2 + 2R\dot{R}\rho),$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t)R(t).$$

Az Einstein egyenleteket használva az első egyenlet, ami az energia megmaradást írja le, változatlan.

$$\dot{R}(t)^2 = -k + \frac{8\pi}{3}G\rho R^2$$

k különböző értékei a különböző tágulási módoknak (elliptikus, parabolikus, hiperbolikus) felelnek meg (hasonlóan, mint a bolygómozgásnál a pálya).



A második egyenlet relativisztikus esetre módosul

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)R,$$

ami

$$dE + pdV = 0$$

alakban írható egyszerű esetre. Ez az egyenlet az adiabatikus tágulást írja le. Ha a nyomás nem zérus az energiaváltozás sem az.

Az Univerzumban nincs energia megmaradás!

Ha R csökken, E és M nő,

$$M \sim \rho \sim \frac{1}{R^3},$$

$$E \sim M.$$

Finom egyensúly, nehéz létrehozni $\frac{E_{kin}}{E_{pot}} \rightarrow 1 - t$.

Ha

$$\frac{E_{kin}}{E_{pot}} - 1 \sim \begin{cases} 10^{-4} & T \sim 1 & eV, \\ 10^{-16} & T \sim 1 & MeV, \\ 10^{-20} & T \sim 100 & MeV, \\ 10^{-50} & T \sim 15 & GeV. \end{cases}$$

$P \rightarrow 0$ esetén M és R ellentétesen változik, visszafele haladva $\frac{M}{R}$ nő, E_{pot} nő, $\frac{E_{kin}}{E_{pot}} \rightarrow 1$ nő. Ez egy kezdeti feltétel probléma. Megoldható, ha feltesszük, p nem mindig pozitív. (Ilyen van nehézion reakciókban is, instabilitás)

A negatív p jelentésének megértéséhez nézzük általában p jelentését. Bevezethetjük az effektív tömeget:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)R = -\frac{G\tilde{M}_{eff}}{R^2}$$

$$\tilde{M}_{eff} = \frac{4\pi}{3}R^3(\rho + 3p)$$

Kezdeti forró Univerzumban a sugárzás $p = \rho/3$.

$$\tilde{M}_{eff} = 2M$$

Negatív nyomás gravitációsan kompenzálja a tömegsűrűséget (antigravitáció), gyorsulás $\rightarrow 0$. Tömeg termelődik, éppen úgy hogy $\frac{M}{R}$ állandó legyen.

Nem csak megállítani lehet a fékeződést, de megfordítani is. Ha feltesszük, hogy

$$p = -\rho$$

$$\frac{GM}{R} \sim R^2, \quad R \sim e^{\alpha t}, \quad \tilde{M}_{eff} = -2M.$$

Ilyenkor $p + \rho = 0$ (legnegatívabb lehetséges nyomás) A speciális kezdeti feltételt kezdeti negatív nyomás szükségtelessé teszi.

8.2.3. Extrapoláció vissza

Húzzuk össze Univerzumot. Kék eltolás

$$T = (1+z)T^0, \quad \text{fotonra :}$$

$$E_{sug} \sim (1+z)^4 E_0$$

A hőmérséklet, sugárzásos energia illetve nyugalmi energia változása az összehúzódás során:

$$E_m \sim (1+z)^3 E_0.$$

- $z = 1500$, $T = 4000K$ – A hidrogén atom ionizálódik. Korábban plazma volt, A compton szórás miatt egyensúly van elektron és foton közt. Minden szerkezet foton szórásban ekkor keletkezik, a háttérsugárzásból ezt az időpontot figyeljük meg.
- $z \sim 10^9$, $T \sim 3 \cdot 10^9 K$ – ekkor $\sim MeV$ nagyságrendű fotonok, szétverik magot. A mai elemek itt keletkeznek. Korábban csak nukleonok voltak.
- $z \sim 3 \cdot 10^9$, $T \sim 10^{10} K$ – párkeltés. Termodinamikai egyensúly e^- , e^+ , γ között. A részecske sűrűség itt még tipikus laboratóriumi sűrűség.
- $z \sim 10^{13}$, $T \sim 3 \cdot 10^{13} K$ – antirészecskék keletkezése. A teljes sűrűség még mindig kisebb mint ρ_n

Még tovább visszamenve történt a kvarkanyag keletkezése. Az Univerzum nukleáris fejlődése (amikor még a magfizika fontos) akkor kezdődik, amikor a barionok megjelennek.

A részecskék egyensúlyban vannak a sugárzással nagy energián. Amíg $mc^2 \sim E$, ugyanolyan gyakoriak, mint a fotonok, mert keletkezni tudnak.

$$2\gamma \rightleftharpoons x + \bar{x}.$$

Protonok és neutronok addig vannak egyensúlyban, amíg a kölcsönhatás erős, át tudnak alakulni egymásba.

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-,$$

10^{15} K körül ez gyakori folyamat. Amikor ν kifagy

$$\frac{[n]}{[p]} = e^{-\frac{\Delta mc^2}{kt}}.$$

Kb. 10^{10} K-nél a gyenge kölcsönhatás ideje hosszabb mint az Univerzum addigi kora (1s), utána a neutronok már csak bomlanak, illetve magokba rendeződnek. Könnyű magok ($D, {}^3He, {}^4He, {}^7Li$) keletkeznek.

Viszony és számok, amiket ma látunk, Ω értékétől függ. 4He eléggé független ($2.15/115$) $\sim 25\%$.

A könnyű elemek gyakorisága megmondja, mennyi barionos anyag van az Univerzumban.

Mindezek a jelenségek (nukleoszintézis, háttérsugárzás, stb.) bizonyítják a Big-Bang-et.

8.2.4. Big Bang modell

Feltevések:

1. A fizikai törvények nem változtak (állandók változhatnak) .
2. Forró, egyenletes gáz van az Univerzumban, termikus egyensúly .
3. Gáz és tér együtt fejlődik .
4. Az anyag állapotában és a sugárzásban bekövetkező változások olyan simák, hogy az Univerzum termodinamikai fejlődésében nem játszanak szerepet.
5. Az Univerzum nagy skálán homogén: nincs él és közép.

Következmények mára vonatkozóan

1. Tágulás, vöröseltolódás.
2. Mikrohullámú háttérsugárzás (fekete test).
3. p , α és egyéb könnyű elemek viszonya.

A sikerek mind az első másodperc után vannak csak!

A problémák mind a kezdeti feltételből jönnek:

1. A háttérsugárzásban fotonoknál izotrópia van, ami termikus egyensúlyt jelent. Ma ez nincs. Hogyan jött ki az Univerzum a termikus egyensúlyból?

2. A horizontalitás problémája: az okság elve miatt az Univerzum egyes részei soha nem lehettek kapcsolatban a γ sugárzás kibocsátásakor, mégis a γ sugárzása nagyon síma. Horizont távolság: az a maximális távolság, amit a fény megtehetett az Univerzum kezdete óta. Uniformitás kezdeti feltétel !?
3. Nagyon speciális kezdeti feltételek szükségesek az anyageloszlásra. $\Omega \sim 1$ az indulás, de attól kicsit eltérő. Simaság!
4. $\frac{[p]}{[\gamma]} \sim 10^{-8}$ Hogyan jött ki egy ilyen arány?
5. A galaxisok (nagy méretű struktúrák) keletkezése nem magyarázható meg.
6. Az antianyag hiánya
7. Távolodásnál $E_{kin} \sim E_{pot}$. Miért?

A kérdések egy részére a GUT tud választ adni .

Big-bang időskála

Idő	Hőmérséklet	Energia	Lehetséges jelenség
10^{-43} s	10^{32} K	10^{19} GeV	Kvantum gravitáció
10^{-37} s	10^{29} K	10^{16} GeV	Erős, elektromágneses és gyenge kölcsönhatás egyesítve
10^{-33} s	10^{27} K	10^{14} GeV	Az anyag predominanciája az antianyag felett
10^{-9} s	10^{15} K	10^2 GeV	A gyenge kölcsönhatás leválik
10^{-2} s	10^{13} K	1 GeV	A kvarkokból kialakul a p és a n
100 s	10^8 K	10^{-4} GeV	Nukleonok kötődése: He, D kialakulása
10^6 év	10^3 K	0.1 eV	Fotonleválás, a háttér-sugárzás eredete
10^{10} év	3 K	10^{-3} eV	Galaxisok kialakulása
$\sim 10^{32}$ év	?	?	Az anyag szétporlad vagy gravitációs kollapszus

8.2.5. Az élet kialakulásának és az interstelláris közlekedésnek feltételei

Az élet kialakulásának a feltételeit nehéz pontosan meghatározni, bizonyos alapvető szükségleteket azonban a körülményeknek ki kell elégíteniük. Ezek röviden összefoglalva a következők.

- a) A víz folyékony fázisban való jelenléte. Ez a feltétel ugyanis valószínűleg a strukturák képződésére vezető kémiai reakciók alapja. A kémiai kötések többfélék lehetnek, de a legbonyolultabb fehérjemolekulák hidrogén kötéssel kötődnek, ezek kialakulásához víz kell. Jóval zérus fok alatti hőmérsékleten a hidrogénkötés létrejötte szilárd jégoldatban túlságosan lassú folyamat, magas hőmérsékleten viszont a struktúra elbomlik.
- b) Ne legyen koncentrált szabad áram (ionizáló sugár stb.) jelen, amely a komplex strukturákat elbontja. Szükség van olyan védelemre, amely a világtűr sugárzása nem hatolhat át akadály nélkül. A Föld körül ilyen védelmet a levegő réteg jelent.
- c) Az élet kialakulása lassú, milliárd éves folyamat. Szükséges, hogy annyi időn át az élethez szükséges hőmérséklet legyen a bolygón, amely nem változhat túlságosan pl. Napközeli-Naptávoli vagy hasonló okok miatt.

Ez a három követelmény nem tűnik túlságosan soknak, mégis erősen megszorítja, mely csillag bolygóján kereshetünk életre alkalmas körülményeket. Ezek a megszorítások a következők:

- A) A csillag nem lehet kettős csillag. Kettős csillag esetén a bolygó olyan hosszán elnyúlt ellipszispályán kering, hogy napközelnaptávoli túl nagy a hőmérsékletkülönbség. A csillagok 60 %-a kettős csillag, a c) követelmény ezeket automatikusan kizárja.
- B) A csillag nem lehet túlságosan nagy, ekkor ugyanis a csillag gyorsan fejlődik, a hidrogén-hélium égés túl gyorsan megy végbe, emberi élet kialakulására nem elég a bolygón az idő, legfeljebb primitív élet várható.
- C) A csillag nem lehet túlságosan kicsiny, ekkor ugyanis kicsi körülötte az a bioszféra, ahol az élet kialakulására alkalmasak a körülmények és kicsi annak a valószínűsége, hogy ebben a tartományban egy bolygó van.

- D) A Naprendszeren belül az impulzusmomentum 99, 5 %-át a bolygók képviselik, fiatal csillagok impulzusmomentuma viszont magára a csillagokra koncentrálódik, ezeknek feltehetőleg nem volt még idejük bolygót létrehozni vagy befogni maguk köré. Olyan csillagot kell tehát keresnünk, amelynek kicsi az impulzusmomentuma.

Mindezek a követelmények eléggé lecsökkentik azon csillagok számát, amelyek körül keringő bolygókon feltételezhetjük, hogy élet van. A hozzánk legközelebbi olyan csillag, amely a fenti körülményeket mind kielégíti, a 10 fényévre levő Tau Ceti.

Az emberiségnek régi vágya a csillagok közt utazni, és mióta a világűrbe rakétán emberek utaznak, természetesnek tűnik az a feltevés, hogy nemsokára más emberiségek lakóit keresik fel interstelláris rakétáink. A probléma azonban nem ilyen egyszerű. Ha az interstelláris térben könnyű lenne utazni, várható, hogy más csillagok bolygóiról fejlettebb emberiségek meglátogatták volna már a Földet. Bár sokan látják a repülő csészaljakat és a "Jövő Emlékei"-ben próbálták bizonygatni, hogy bizonyos jelenségeket csak magasabb fejlettségű lények csinálhatták a Földön, a helyzet az, hogy az a tény, hogy erre egyetlen konkrét bizonyítékunk sincs, a dolgot teljesen valószínűtlenné teszi. Senki sem gondolhatja komolyan azt, hogy a Földre került fejlettebb lények pont a Húsvét szigeteken primitív kőoszlopok faragásával és elszállításával foglalkoztak volna. Amíg viszont az ősemberek által használt eszközöket mindenütt megtaláltuk, magasabbrendű fejlettséget bizonyító eszközöket mint pl. egy kilövőhely elemeit, nem sikerült találnunk. Ha viszont más emberiség nem járt még a Földön, az vagy azért van, mert kiesünk az interstelláris utazások fő irányvonalából, vagy azért, mert csakis elvi és nem technikai nehézségek merülnek fel ezzel kapcsolatban.

Ha valaki a Tau Cetire akarna eljutni, 20 fényév távolságnyi utat kell oda vissza megtennie. Ha a rakéta fénysebesség felével halad, akkor is 40 év: egy emberélet. Ezalatt a normális élet körülményeit kell biztosítani, azaz családalapításra, táplálék előteremtésre, gyógykezelésre, tiszta ruhanemű felvételére stb. mind mind gondolni kell. Mekkora lehet az a rakéta, amelyik mindehhez elegendő anyagot visz magával, 8-10 ember életlehetőségeit biztosítja 40 évre? Es ezt a nagy tömeget olyan nagy energiával kell fellőni, hogy a Föld vonzóerejének és a Naprendszer vonzóerejének elhagyása után a sebessége még mindig a fénysebesség fele legyen. Erre valószínűleg a Föld egész ismert energiakészlete nem lenne

elegendő. De tegyük fel, hogy a rakétát kilőttük ilyen sebességgel: hogyan lassul azután le a Tau Ceti terébe érve? Az biztos, hogy az ehhez szükséges energiát már nem viheti magával és ha az útja közben talált interstelláris anyagot 100 %-osan energiává alakítja át, akkor sem elég erre az energiája. Az egyetlen elfogadható magyarázat az, hogy a fogadó bolygó kell, hogy lelassítsa a rakétát. Jelen tudásunk szerint úgy tűnik, hogy az interstelláris közlekedés elengedhetetlen feltétele az interstelláris beszélgetés.

Az interstelláris beszélgetést a Föld már megkezdte. Hatalmas adók próbaképpen rendszeresen surágozták a Tau Ceti felé fordulva a legalacsonyabb prímszámokat egymás után. Ki tudja? Talán húsz év múlva választ kapunk rá.

9. fejezet

Alkalmazás

A magfizika alkalmazások az élet igen sok területére eljutottak. A következőkben az egészségügy, környezetvédelem, ipari termelés hatékonyságának növelése, energiatermelés, úrkutatás, (nemzet)biztonság, más tudományágak, valamint az adatfeldolgozás és informatika irányú felhasználásokat soroljuk fel.

9.1. Egészségügy

A magfizika egészségügyi alkalmazása már jelentős méreteket öltött: 2000-ben az Egyesült Államokban 1600 onkológiai részleg összesen 2100 lineáris gyorsítót üzemeltetett, és a nukleáris diagnosztika évi 25 milliárd dolláros forgalmat generált. Az alkalmazások három fő területe a diagnosztika, a sugárkezelés és az izotópos nyomkövetés.

9.1.1. Diagnosztika

A diagnosztikai célú képalkotás egy évszázada, Röntgen felfedezésével kezdődött, aki azonnal alkalmazta a röntgen sugárzást (nagy energiájú fotonok) az emberi test belsejének feltérképezésére. Az új technikák lehetővé teszik a még pontosabb képalkotást sebészi beavatkozás nélkül. Sokat javult a röntgen sugárzás felhasználása (képfeldolgozási módszerek segítségével jelentősen csökkenthető az alkalmazott sugáradag), alapvető magfizikai felfedezések jóvoltából megszületett a CAT (vagy CT) (computerized axial tomography: a röntgensugárzással egy tengely mentén végighaladva mérnek, és a kapott képet számítógéppel alakítják térbelivé), a mágneses rezonancia kép – MRI (magnetic resonance imaging), a

foton emissziós számítógépes tomográfia – SPECT (single photon emission computerized tomography), a pozitron emissziós tomográfia – PET (positron emission tomography).

SPECT

A SPECT eljárásban kis mennyiségben rövid élettartamú radioaktív – főleg egy fotont kibocsátó – izotópot juttatunk az emberi szervezetbe, valamilyen vivőanyagban elkeverve. Ez a vivőanyag különböző koncentrációban gyűlik össze az emberi szervezetben, és az onnan jövő fotonokat nagy és mozgatható fotondetektor rendszerrel észleljük. Különböző szögekben mérve meghatározható, hogy a vivőanyag hol kötődött meg a szervezetben. A vivőanyagot az adott vizsgálatnak megfelelően választják ki, például úgy, hogy a rákos sejtekben kötődjön meg. Egy tipikusan használt izotóp a bárium. Ilyen módszerrel kimutatható pl. a csonttrák kezdeti stádiuma.

PET

A PET (pozitron emission tomography) a SPECThez hasonló módszerrel dolgozik, de a radioaktív izotóp pozitront bocsát ki. A pozitron a közelben levő sejt egy elektronjával annihilál, és két, egymással ellentétes irányban mozgó fotont sugároz ki, melyet a páciens köré épített detektorrendszer észlel. A két egymással szemben mozgó foton miatt nagyobb pontossággal lehet kimérni az emisszió és így a vivőanyag megkötésének helyét. A PET-el fel lehet használni az egész emberi testben rákos szűrésére, de akár az agy metabolikus folyamatainak pl. neurológiai vagy pszichiátriai vizsgálatára, vagy a szív és más szervek metabolizmusának feltérképezésére. A vizsgálata lehet hosszú megfigyelés, amikor lassan, folyamatosan adagoljuk a vivőanyaggal kevert radioaktív izotópot, de lehet gyors, dinamikai megfigyelés, amikor azt vizsgáljuk, hogy miként terjed szét a vivőanyag a szervezetben. Jelenleg a fizikusok a nagyon gyors mérési eljárásokon dolgoznak, melynek segítségével akár a rákos részek sugárkezelése közben is lehetne folyamatosan ellenőrizni a sugárkezelés eredményességét, és így pontosabban beállítani az alkalmazandó dózist.

MRI

Az MRI (magnetic resonance imaging), az NMR-en (nukleáris mágneses rezonancia) alapszik. A spinnel rendelkező, mágneses térbe helyezett mag nívói a Zeeman

effektus révén felhasadnak, és $\pm\vec{\mu}\vec{B}$ értékkel eltolódnak (itt $\mu_N = g_N \frac{e}{2m_N c}$ a mag-spin irányába néző magmagneton, g_N az adott mag giromágneses faktora, mely pl. a proton esetében 5.6). Ha csak az alacsonyabban fekvő energiaszint van betöltve (páratlan számú proton vagy neutron esetén), akkor $\hbar\omega = 2\vec{\mu}\vec{B}$ frekvenciájú elektromágneses tér átmenetet tud generálni a két nívó között. Ettől a gerjesztéstől a mag később megszabadul, és visszasugározza az elnyelt fotont. Ezt a sugárzás lehet mérni, és a fenti frekvencia környékén erős rezonanciát látunk. Mivel minden magra különbözik a giromágneses faktor, ezért a rezonanciafrekvencia más lesz minden magra, mely lehetővé teszi a magok azonosítását. Tipikusan 300 MHz-es elektromágneses teret és 7T mágneses teret szoktak alkalmazni.

Azonban az NMR ennél többre is képes, mivel az atomokban és molekulákban levő elektronok is keltenek mágneses teret, mely kölcsönhat a mag spinjével. Ez a tér annál erősebb minél közelebb van az elektron a maghoz, és minél több elektron van jelen, azaz a kémia kötés befolyásolja a mag által érzett mágneses teret, ennek következtében a mag energiaszintjeinek felhasadását, és így végső soron az NMR rezonanciafrekvenciát. A különböző molekulákra jellemző, adott referenciaanyaghoz képesti módosulásokat megmérték, és ennek alapján gyorsan és sérülésmentesen be lehet azonosítani ismeretlen anyagokat (akár bőrönben vagy konténerben is, azok kibontása nélkül). A módosulások igen kicsik, 10^{-6} nagyságrendűek, ezért milliomodrészben szokták őket kifejezni:

$$\delta = 10^6 \frac{\omega - \omega_{\text{ref}}}{\omega_{\text{ref}}}. \quad (9.1)$$

Az NMR jel erőssége két tényezőtől függ: 1. a protonok (ha a protonra állítjuk be a mágneses tér erősségét és az e.m. tér erősségét) sűrűségétől a szövetben, és 2. a legerjesztés idejétől, azaz a visszasugárzott foton késleltetésétől. Míg a protonok sűrűsége elég állandónak tekinthető a különböző (lág) szövetekben, a visszasugárzási idő jelentősen különbözik. A vízben gazdag területek, a kalciumban gazdag részek gyenge jelet adnak, és sötétek a képen, míg a zsír, fehérje, vér erős jelet adnak, és világos képet adnak. A CAThez, vagy PEThez hasonló módon lehet tomográfiát csinálni. A kép felbontása kb. 1.5 mm, és az NMR erős jele miatt igen gyors. Jelenleg ez az egyetlen képalkotási eljárás a tüdő vizsgálatára, ahol a képet a belégzés ideje alatt el lehet készíteni, ^3He vagy ^{129}Xe gázok alkalmazásával (a páciens ilyen tartalmú keveréket lélegez be). Mivel a ^{129}Xe jól oldódik a vérben, ezért biokémiai folyamatok lezajlásának részleteit tárja fel, a radioaktív nyomkövetéshez hasonlóan.

9.1.2. Radioaktív nyomkövetés

A gyorsítóknak vagy nukleáris reaktorokban előállított radioaktív izotópokat a biológiai, illetve orvosi biológiai kutatások számos területén alkalmazzák. A ^{14}C vagy ^3H izotópokkal előállított molekulákat kémiai tulajdonsága ugyanaz, mint a nem sugárzó atomokat tartalmazóké, így nem befolyásolják a biokémiai folyamatokat, miközben nyomon követhető mozgásuk a szervezetben, feltérképezhető, hogy mely sejtek kötik le az ilyen molekulákat, illetve, hogy milyen anyagok kötődnek bizonyos receptorokhoz. Ilyen tulajdonságuk miatt használhatók diagnosztizálásra (eljut-e a kívánt helyre a gyógyszer), illetve új gyógymódok kifejlesztésére (pl. blokkolni adott receptorokat). Direkt módon is alkalmazzák a radioaktív izotópokat bizonyos betegségek esetében.

Radioaktív izotópokat használnak a DNS azonosításra (pl. bűnügyek kapcsán), valamint a Humán Genom Projektben is a DNS feltérképezése során.

Nagyon nagy pontosságú vizsgálatok esetén nem a radioaktív izotópok bomlását mérik, hanem egy nagyon kis mintát gyorsítanak, és tömegspektrométerrel (ld. 1.1.2. fejezet.) értékelnek ki. Ezzel a módszerrel nagyon lassan bomló izotópok, illetve nem radioaktív nyomelemek is jól kimutathatók.

9.1.3. Sugárkezelés

A sugárkezelést általában a rák különböző formáinak kezelésére használják. A módszer lényege, hogy a sérült, rákos szöveteket szétroncsolja, ezért lokalizált tumor esetén használható jól, különösen olyan helyeken, ahol hagyományos sebészi eljárással a tumor nem vágható ki (pl. agy).

Elektromágneses sugárzás

A klasszikus sugárkezelés röntgen vagy γ sugarakat használ. Ezek gyakorlatilag áthaladnak az emberi testen, így tetszőleges mélység esetén könnyen alkalmazhatóak, viszont éppen ezért minden az útjukba kerülő szövetet – az egészségeset is – roncsolnak. További probléma, hogy a legnagyobb roncsolást a testbe való belépéskor hajtják végre, ismét csak általában egészséges szöveteken. Hogy csökkentsék ennek hatását, a terápiát úgy alkalmazzák, hogy sok különböző irányból sugározzák be a daganatot, így a környező egészséges szöveteken csökkentve a sugárterhelést. Ma már léteznek olyan programok, melyek kiszámolják az optimális besugárzási stratégiát, mely maximálja a daganatba jutó sugárzást miközben a lehető legkisebbre veszi az egészséges szövetekbe jutó sugáradagot. A röntgen

és γ sugarak jól fókuszálhatók, így néhány milliméteresnél nagyobb daganatok kezelhetők vele.

Protonok

Az elektromágneses sugárzás az egészséges szövetek is roncsoló káros mellékhatását próbálták csökkenteni más részecskék használatával. A proton például energiájának jó részét ott adja le, ahol megáll a szervezetben, ezért a proton energiájának helyes megválasztásával be lehet állítani, hogy az a szervezeten belül a daganat helyén álljon le, és hatáskeresztmetszet energiafüggése miatt (fordítottan arányos az energiával, ld. 2.1.3. fejezet, (2.29) képlet) energiájának zömét ott is fogja leadni, így gyakorlatilag csak a sérült sejteket roncsolja. A proton alkalmazása lehetővé teszi az alkalmazott dózis növelését a káros mellékhatások növelése nélkül, ami eredményesebb terápiát eredményez. Hátránya, hogy nem fókuszálható olyan pontosan, mint a γ sugárzás, ezért nagyobb tumorok esetében alkalmazható.

Neutronok, nehézionok

A γ , proton, vagy elektron besugárzás esetében elég nagy dózisokra van szükség, mivel ezen sugárzásoknak viszonylag alacsony a *lineáris energia transzfere*, azaz a kémiai kötés feltörő képessége. Érdekes módon, a neutronok sokkal jobban törnek a kémiai kötések, ezért hatékonyabbak a rákos sejtek roncsolásában, különösen az oxigénszegény sejtek esetében. Hatnak még a sugárzásra ellenállóbb rákos sejtekre is. Klinikai vizsgálatok szerint sikeresen alkalmazhatóak nyálmirigy-, néhány fej- és nyaktáji-, előrehaladott prosztatadaganat és melanoma (??? bőrrák) esetében. Hátránya, hogy a fotonhoz hasonlóan nyaláb útjában mindent roncsol, ezért itt is sok irányból sugározzák be a páciens. Elég rosszul fókuszálható, 9 cm-es tumorok esetében használható jól, és elég nagy a testbe való belépéskor a roncsolás.

A nukleonként 400-800 MeV energiájú nehézion nyalábok (főleg szén, de esetleg neon) ideálisak a sugárterápiához. A nehézionoknak is nagy a lineáris energiátranszfere, nyalábja könnyebben előállítható, mint a neutronnyaláb, és annál jobban fókuszálható (cm nagyságrend). Jelenleg már a németországi GSI kutatóközpont több éves kísérletei után Heidelbergben építik az első orvosi célú terápiás nehézion gyorsítót.

9.2. Energiaipar

Atomhasadással vagy fúzióval igen nagy energia szabadítható fel. Például egy 1000 MW-os erőmű egy évben alig egy tonna urániumot használ fel. Az 1960-as és 1970-es évek során ezért sorra épültek az atomreaktorok világszerte. A fejlett országokban az elektromos áram több, mint 20%-a nukleáris energiából származik (17% a világszerte), a legmagasabb az arány Franciaországban, ahol 76%. Alkalmazásával visszaszorítható a szénhidrogénégetés és a vele járó széndioxid, illetve egyéb a melegházhatást erősítő gázok, valamint a savas esőt okozó kén kibocsátása. Azonban az üzemeltetési kockázat, valamint a nukleáris hulladék elhelyezésével kapcsolatos problémák leállították ezen erőművek további térnyerését. Mivel az elvileg biztonságosabb fúziós erőmű még mindig nem látszik megvalósíthatónak a közeljövőben, ezért előtérbe került az atomművek üzemeltetésének a társadalom által elfogadott kockázatok közé szorítása, illetve a veszélyes hulladék ártalmatlanítása. Ez utóbbira már igen biztató kísérletek vannak: nagy energiájú proton gyorsítókban a hosszú felezési idejű, veszélyes izotópok (neptunium, amerícium, curium, jód) átalakíthatók rövid felezési idejű, élettanilag ártalmatlanabb elemekké. A nagyenergiás proton egy céltárgyon intenzív neutronnyalábot hoz létre, mely átalakítja a hulladék izotópjait. A cél, hogy a hulladékban levő izotópok felezési ideje 100 év alá kerüljön. A számolások szerint ilyenkor egy átmeneti, 30 éves tárolás után a visszamaradt anyag sugárzása kisebb, mint az eredeti uránium üzemanyagé. Egy 3600 MW-os gyorsító kb. 75 könnyűvízes reaktor hulladékát képes feldolgozni. További ötletek szerint ez az eljárás biztonságosan "beépíthető" az atomreaktorokba, kisebb energiafelhasználással.

A várt igazi áttörést a fúziós reaktorok jelentenék, melyek konstrukciójuk folytán sokkal biztonságosabbak, mint az atomreaktorok, fűtőanyaguk, a deutérium hatalmas készletekben rendelkezésre áll az óceánokban, és nem hoznak létre veszélyes, hosszú élettartamú izotópokat.

A fúziós erőművek létrehozására irányuló kutatások sokáig a TOKAMAK típusú, egy toroid belsejében igen erős elektromágneses térrel egybetartott, nagyon nagy hőmérsékletű plazma egybetartását próbálták elérni. A várt eredmények azonban nagyon lassan jönnek, a plazma instabilitása igen súlyos problémának bizonyult. Alternatív lehetőségként jött szóba a deutérium-trícium kapszulák hirtelen összenyomása lézerek, vagy nehézionok segítségével. Jelenleg mindkét projekt az első, áramtermelő modelljét készül felépíteni.

9.3. Környezetvédelem

- Nyomkövetés:
 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arány az oceán felszínén a légkörrel való kölcsönhatással közel állandó ($1.3 \cdot 10^{-12}$), mivel a ^{14}C folyamatosan újratermelődik a felső atmoszférában úgy, hogy a bejövő igen nagy energiájú kozmikus sugárzás „szétver” atomokat, melyekből többek között n lép ki. Ez a neutron kiüt egy protont a légkörben bőven levő ^{14}N -ből, és beül a helyére, létrehozva a ^{14}C -t, mely CO_2 formájában bekerül az élő szervezetekbe, és vízbe. A vízben rengeteg CO_2 van oldva, amikor az oceáni áramlással ez alábukik, a ^{14}C bomlik: a $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arányból meg lehet mondani, mikor hagyta el a vízréteg a felszínét, a kapott idősből pedig feltérképezhető az áramlás. Ezzel a technikával állapították meg, hogy a Yellowstone Nemzeti Parkban a gejzírekből feltörő víz valamikor Kolumbusz idejében került a felszín alá.
- Nukleáris hulladék megsemmisítése: intenzív gyorsítónyalábok átalakítják a hosszú felezési idejű izotópokat stabil, vagy rövid élettartamú izotóppokká.

9.4. Kormeghatározás

9.4.1. Régészet

... $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arány (ld. Környezetvédelem feljebb). A módszer nem alkalmazható, ha a mintát tűz érte, mivel az általában helyreállítja a két izotóp légköri arányát, és a mérés az utolsó tűz(vész) idejét adja meg.

A meghatározható kort az 5730 éves félélettartam határozza meg, ezzel a módszerrel kb. 50000 évre lehet visszamenni. Az utolsó jégkorszak korát is így határozták meg 11400 évben. Precíziós, gyorsító és tömegspektrométer segítségével végrehajtott mérésekkel a módszer mérési tartománya kitolható kb. 100000 évre.

A módszer hibája függ a szén beépülésének időpontjában fennálló pontos $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ aránytól, valamint a statisztikus hibáktól. 5000 éves korig a hosszú ideig élő amerikai nyugati fenyők évgyűrűinek leszámolásával, és a ^{14}C módszer összehasonlításából felállítottak egy korrekciós görbét, mely azt mutatta, hogy pl. 4000 éves fenyők esetén a ^{14}C módszert azok korát 600-700 évvel mutatta kevesebbnek, ami arra utal, hogy régen több volt a ^{14}C a légkörben. Ennek egyik lehetséges oka, az utóbbi 100 év során a szén és olaj elégetése (melyekben a fákkal ellentétben már

erősen lecsökkent a ^{14}C mennyisége) felhígította a légkör ^{14}C tartalmát. Ugyanakkor az 1950-es és 1960-as évek atomkísérletei meg ezzel ellentétes folyamatként emelték a légkör ^{14}C tartalmát.

9.4.2. Geológia

A kőzetekben levő radioaktív izotópok (arányok) utalnak a kőzet kialakulásának idejére. Az olvadt lávából például az argon gáz könnyen kiszökik, és mivel nemesgáz, nem épül be molekulákba sem. Ezért a kőzet kialakulásakor a benne levő argon mennyiség lenullázódik, és a ma a kőzetekben megtalálható argon mennyisége a kálium radioaktív bomlásából származik. A félélettartam, és az argon - kálium arány ismeretében ebből megállapítható, hogy mikor szilárdult meg a kőzet. A módszer a százezer évnél régebbi korok meghatározására alkalmas.

Még régebbi korok meghatározására az urán használható: a frissen kialakuló kőzet nem tartalmaz ólmot, de a benne fellelhető urán idővel ólomra bomlik, így a kőzet urán/ólom arányából kiszámolható a kőzet megszilárdulásának ideje. Az ^{235}U -el százezer, az ^{238}U -al tízmillió év nagyságrendű idők mérhetőek.

Mivel a geológiai rétegek sokszor keverednek szerves anyag tartalmú rétegekkel, ezért a ^{14}C eljárás is utal az adott réteg korára. A módszer kb. 1000 és 70000 év közötti szerves anyagok korának meghatározására használható.

Szülő	$T_{1/2}$ (milliárd év)	Leánymag	Kor (év)	Anyag
^{235}U	0.704	^{207}Pb	$> 10^5$	cirkon, uraninit, uránszurokérc
^{40}K	1.251	^{40}Ar	$> 10^5$	muszkovit, biotit, hornblende, vulkanit, glaukonit, káli-földpát
^{238}U	4.468	^{206}Pb	$> 10^7$	cirkon, uraninit, uránszurokérc
^{232}Th	13.9	^{208}Pb	$> 5 \cdot 10^7$	
^{87}Rb	48.8	^{87}Sr	$> 10^7$	K tartalmú csillám, káli-földpát, biotit, metamorfitok, glaukonit

9.1. táblázat. Egyes kőzetfajták azonosításához használt bomlásfolyamatok.

9.5. Ipari alkalmazások

A magfizika ipari alkalmazása leginkább az anyagok összetételének meghatározása, adott, kis mennyiségben fellelhető összetevő azonosítása, anyaghibák detektálása, illetve létrehozása feladatkörökben emelhető ki. Az anyaghibák vizsgálata egyrészt már a gyártás folyamán, a selejt kiszelektálása során alkalmazható, vagy nagy szerkezetek (hidak, épületek, hajók) korrosodásának mérésére is szolgál. A NMR technológiát már az előzőekben ismertettük. Egy másik fontos technika a Rutherford szórásos alapul: a visszaszórás energiája függ a szóró részecske tömegétől. Ezzel igen pontosan meg lehet határozni a felülethez közeli részecskék eloszlását, illetve bizonyos határig a mélységbeli eloszlást is. A félvezetőiparban a Rutherford hátraszórással állapítják meg a félvezetők parányi, de lényeges egyenetlenségeit (szennyezés, rácshiba).

Az anyagok nagyon pontos azonosítása alapszik az általuk kisugárzott röntgen- vagy gammasugárzás alapján. A proton indukált röntgen emisszió (PIXE) során az alacsonyenergiás protonokkal gerjesztett anyag röntgen, míg a proton indukált gamma emisszió (PIGE) során a gamma sugárzásának elemzésével állapítják meg annak mennyiségét és térbeli eloszlását (a PET-hez hasonlóan). Egy hasonló, α -proton-röntgen készülék elemezte NASA Sojourney Mars-járójában a marsi kőzetet.

A protonokhoz hasonlóan, neutronokkal is vizsgálhatók az anyagok: a neutron befogása után kibocsátott gamma sugárzással lehet megállapítani a keresett anyag mennyiségét a mintában. Legfontosabb felhasználási területe az olajkutató, ahol a próbafúrat aljába teszik a neutronforrást, és a cső különböző pontjain elhelyezett detektorok segítségével rekonstruálják a cső három dimenziós környezetének anyageloszlását. A neutronforrásnak ezért elég kompaktnak kell lennie, el kell viselnie a légköri nyomás akár 2000-szeresét is, valamint 175 fokos hőmérsékletet is.

A különböző sugárnyalábokat is intenzíven használják az iparban. Az élelmiszerek sterilizálása, vagy az epoxi alapú anyagok megszilárdítása gamma sugarak segítségével történik. A félvezetőipar részecskenyalábokat használ a szennyeződések beültetésére, de a kész termékek vizsgálatára is: a méret csökkenésével az elektromos áramkörök egyre érzékenyebbek az ionizáló háttérsugárzásra, és a sugárzás hatására végbemenő változásokat részecske besugárzással tanulmányozzák.

Nemrégiben fejlesztették ki a proton-, neutron, illetve nehézion nyalábok alkalmazását a magashőmérsékletű szupravezetők paramétereinek javítására. Ezek a

szupravezetők kb. 130 K hőmérsékleten ellenállás nélkül vezetik az áramot. A legtöbb esetben igen nagy áramot kell továbbítaniuk, ami erős mágneses teret kell, és ez a tér behatol a szupravezetőbe, és ott köráramok segítségével mágneses fluxuscsoveket hoz létre. Elektromos tér jelenlétében ezek a fluxuscsovek mozognak, és energiát disszipálnak. Ezzel egyrészt energiaveszteség lép fel, másrészt a melegedés a kritikus hőmérséklet fölé emelheti a szupravezető hőmérsékletét, ami így elveszti szupravezető képességét. Ha a mágneses fluxusokat sikerül lerögzíteni, az egész probléma elkerülhető. Neutron-, vagy nehézionbesugárással létrehozhatók olyan szennyeződések, amik megkötik a mágneses fluxuscsoveket, megnövelve a magashőmérsékletű szupravezetők áramátvivő képességét. Erre a célra a legalkalmasabbak az 5 és 100 MeV/részecske energiájú nyalábok, melyek több nagyságrenddel is megnövelik az átvihető áram nagyságát.

9.6. (Nemzet)védelem

- Fegyverek gyártása

A magfizika nagy felfutása a XX. században többek között a hadászati jelentőségének is köszönhető volt, a nukleáris energia felszabadításával korábban nem látott méretű pusztító fegyvereket fejlesztettek ki. A nukleáris fegyverek kifejlesztése mindjárt felhasználásukkal is járt, a második világháború során 1945-ben Hiroshima és Nagasaki ellen intézett atomtámadást az amerikai légierő. Történészek azóta is vitatkoznak azon, hogy ez, vagy egy esetlegesen elhúzódó hagyományos háború követelt-e több áldozatot. A nukleáris arzenál hívei azzal érvelnek, hogy e fegyverek léte elegendő elrettentő erővel bír ahhoz, hogy ne törjön ki újabb nagy háború, ellenzői pedig, hogy az atomklub tagjai korlátlan hatalommal rendelkeznek a nem tagokkal szemben, ami arra készteti a többieket, hogy ők is kifejlesszék saját atomerejüket, és aztán azt kisebb konfliktusokban is felhasználják.

Az atomarzenál fenntartása állandó felügyelet igényel. Ez egyrészt áll a hidrogénbomba esetében a trícium 12 éves felezési ideje miatt a bomba időnkénti cseréjéből, de akár a karbantartás során az eszközök roncsolásmentes ellenőrzéséből (gamma sugarak, proton radiográfia). A proton radiográfia manapság olyan fokon áll ma már olyan fokon áll, hogy igen mélyen belelát a vizsgált tárgyba, igen éles képet ad róla, jól megkülönböztetve a komponenseket, és elég gyors ahhoz, hogy például egy kémiai robbanásról is pillanatfelvételeket lehessen készíteni vele, megismerve a robbanás pontos folyamatát. Ennek elérésére persze nagyon nagy energiájú protonokra

van szükség, de ez az 50 GeV körüli energia ma már elérhető.

- Fegyverek ellenőrzése

A nemzetközi egyezmények lehetővé teszik a nukleáris anyagok nyomonkövetését, hogy a polgári alkalmazásokból nem lehessen fegyvergyártásra használni azokat. Ennek legegyszerűbb ellenőrzése a gamma detektorok használata, melyek segítségével megbecsülhető a minta uránium és plutónium tartalma. A hasadásból származó neutronok szintén a mintában levő Pu mennyiségére utalnak. Az atomreaktorokban a hasadás folyamán keletkezik az atombombához szükséges Pu, majd hasadással maga is a reakció részévé válik. Ennek következtében mennyisége előbb nő a reaktortérben, majd lassan csökken, a maximális mennyiségét kb. 2-3 hónap alatt érve el. Ezért zárják le a polgári reaktorokat egy évre, mivel akkor már lecsökkent bennük annyira a plutónium, hogy nem gazdaságos kitermelni. A katonai reaktorok nyitottak, hogy mindig akkor "halásszák" le a plutóniumot, amikor a legjobban feldúsult.

Újabban már itt is alkalmazzák a tomográfias gamma analízist, vagy az NMR-t a pontosabb detektálás érdekében. Segítségével felderíthetők a robbanóanyagok, vegyi fegyverek, illetve ahhoz szükséges anyagok, valamint a dúsított uránium és plutónium akár a reptereken, kikötőkben, határátke-lőhelyeken is. A neutronbesugárzás után a befogás következtében kilépő gamma emisszió kimutatja a plaztik bombákban előforduló nitrogént.

Egyes elképzelések szerint nagyon nagy energiájú (1000 TeV) neutrínónyalábok képesek a Föld túloldalán található nukleáris fegyvereket is felrobbantani, ezzel az ilyen fegyverek megsemmisítését idézve elő.

- Kábítószerek felderítése

A kábítószereket is hasonlóan más vegyi anyagokhoz ki lehet mutatni NMR-el, vagy neutronbesugárzással, roncsolásmentesen.

9.7. Mössbauer effektus

A Mössbauer effektusról, és alkalmazásáról a szilárdtestfizikában, illetve az általános relativitáselmélet igazolásában részletesen az 5.2 fejezetben volt szó.

9.8. Informatika, adatfeldolgozás

A magfizikai problémák megoldása egyre kifinomultabb berendezések gyártását, egyre több adat feldolgozását, és az elmélet egyre nagyobb számolási kapacitást igényelték. Ennek során számos számítástechnikai fejlesztés kezdeményezője volt mind a hagyományos mag-, mind a nagyenergiás fizikai (mag- és részecskefizika) közösség. Itt alakultak ki először nagy publikációs adatbázisok, itt (CERN) fejlesztették ki a WWW-t.

A kísérletek során ma már akár több ezer detektor is működik párhuzamosan, melyeket vezérelni kell (mikor mérjenek), a jeleiket gyorsan ki kell értékelni, az egyik detektorrendszer jele indíthatja be a következőt, és végül a rengeteg adatot el kell menteni. Az igazi probléma ez után következik, hogyan lehet a manapság már terrabyte-okra rugó adathalmazban értelmesen keresni.

Az elméleti problémák hasonlóak voltak, nagyon sok számítástechnikai feladat elvégezhető függetlenül, és a végén kell összegyűjteni és elrendezni az eredményeket. A megoldásra megszülettek a klaszterek, a számítógépek megosztják a feladatokat, és párhuzamosan, sokkal gyorsabban oldják meg a problémát. A klaszterszámítások szervezett továbbfejlesztése, amikor a világ különböző tájain levő, éppen nem használt számítógépek is elérhetővé válnak az adatfeldolgozásra, a GRID projekt, szintén a CERN-ben indult útjára.

Tárgymutató

- összehasonlító élettartam, 114
- óriás dipól rezonancia, 87
- alagúteffektus, 124
- antiszimmetrikus hasadás, 130
- CAT, 169
- Coulomb gát, 124, 127, 129
- Dikvarkok, 31
- eltüntető operátor, 109
- félempírikus energiakifejezés, 78, 84, 110, 124, 127
- Fermi folyamat, 114
- Gamow-Teller folyamat, 114
- Geiger-Nutal törvény, 124
- gerjesztett hasadás, 129
- hasadási energia, 128
- késő neutron, 129, 132
- keltő operátor, 109
- kritikus tömeg, 132
- megengedett átmenet, 114
- moderátor, 131
- MRI, 170
- NMR, 170
- Pentakvarkok, 32
- PET, 170
- PIGE, 177
- PIXE, 177
- prompt neutron, 129
- reaktivitás, 131
- SPECT, 170
- spontán hasadás, 128, 129
- sugárkezelés, 172
- szimmetrikus hasadás, 130
- szupermegengedett átmenet, 114
- Thompson modell, 10, 12
- tiltott átmenet, 114
- Weinberg-Salam elmélet, 114
- Weizsäcker formula, 77, 124, 127