Vektoranalízis

1. Alapfogalmak

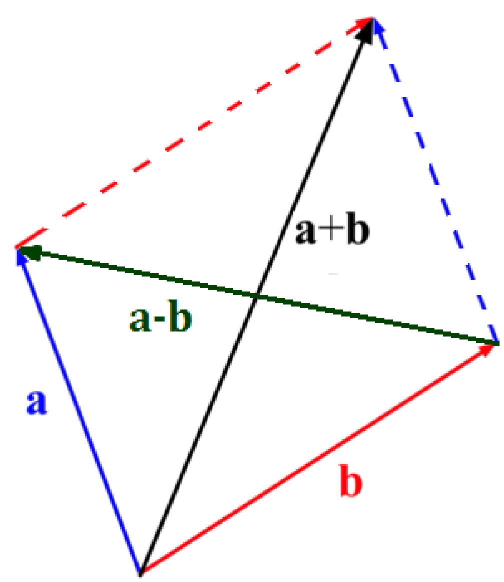
Skalár: egyetlen számadattal (+ mértékegység) jellemezhető mennyiség.

Azonos dimenziójú skalár mennyiségek - mértékegység-konverzió után - összehasonlíthatóak és összeadhatóak egymással, valamint kivonhatók egymásból; tetszőleges dimenziójú skalárokat szorozhatunk és oszthatunk egymással (ha az osztó nem zérus).

Vektor: olyan mennyiség, amelyet egy nagyság és egy irány jellemez (vektor hossza = nagyságának abszolút értéke).

Zérus-vektor ($\vec{\mathbf{0}}$): zérus hosszú (és határozatlan irányú) vektor.

Parallelogramma-szabály: $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ összege és $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ különbsége az általuk kifeszített parallelogramma két átlója.



α skalár és $\vec{\mathbf{a}}$ vektor $\alpha\vec{\mathbf{a}}$ szorzata: $\vec{\mathbf{a}}$-val párhuzamos irányú vektor, melynek nagysága megegyezik α-nak és $\vec{\mathbf{a}}$ nagyságának szorzatával (egy irányba mutat $\vec{\mathbf{a}}$-val ha $\alpha > 0$, egyébként ellentétes irányú).

Műveleti szabályok:

$$\vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} \qquad \text{asszociativitás}$$

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \qquad \text{kommutativitás}$$

$$\alpha(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \alpha\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{b}} \qquad \text{disztributivitás}$$

$$0\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$$

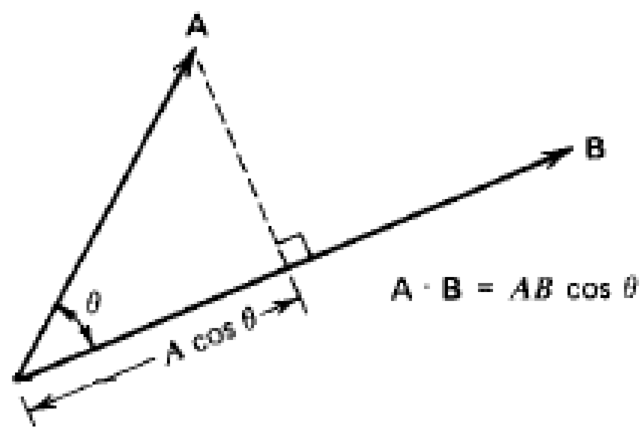
$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-1)\vec{\mathbf{b}}$$

Skalárszorzat:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

ahol θ az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ iránya által bezárt szög.

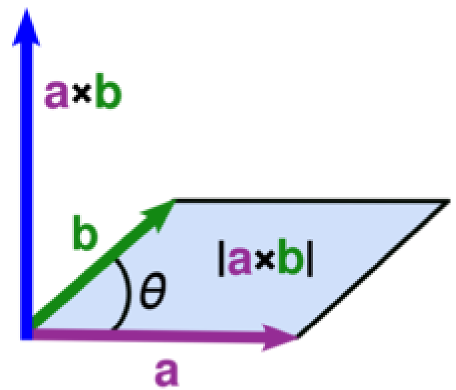


$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \qquad \text{szimmetria}$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \alpha\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}} + \beta\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}} \qquad \text{linearitás}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2 \geq 0 \qquad \text{pozitivitás}$$

Vektoriális (kereszt-)szorzat: $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ olyan vektor, amely merőleges mindkét vektorra, nagysága pedig megegyezik a két vektor által kifeszített parallelogramma előjeles területével.



$$|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\theta$$

$$|\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2$$

Ortogonalitási feltétel: $|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \leftrightsquigarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0 \leftrightsquigarrow \vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ irányai merőlegesek egymásra (vagy valamelyikük hossza zérus).

Párhuzamossági feltétel: $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$ akkor és csak akkor, ha $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok párhuzamosak.

Műveleti szabályok:

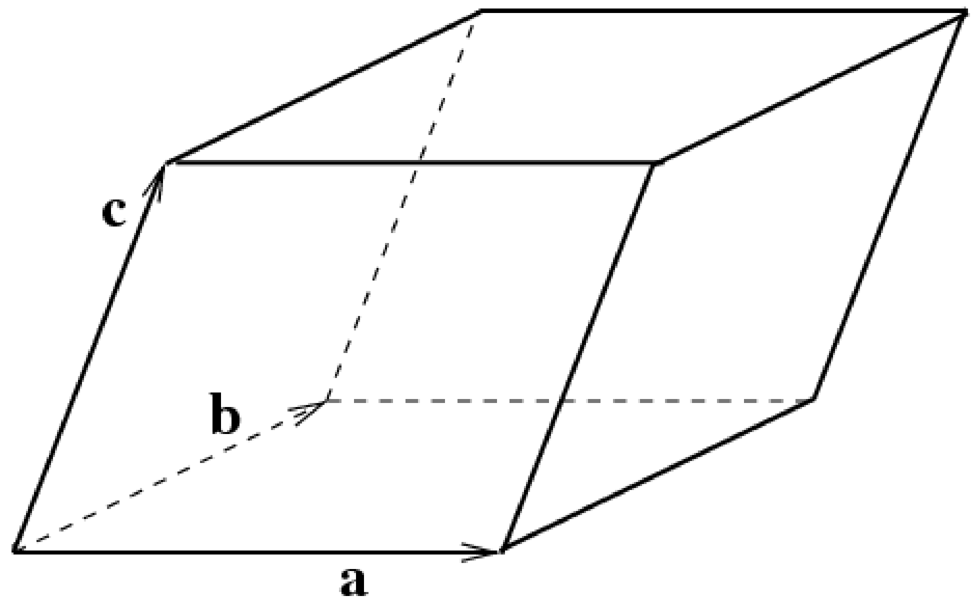
$$\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \qquad \text{antiszimmetria}$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}) + \beta(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) \qquad \text{linearitás}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} \qquad \text{kifejtési tétel}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{d}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \qquad \text{Lagrange–azonosság}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}})$$



$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \texttt{vol}\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right)$ az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogata .

Vektorok numerikus jellemzése vektorkomponensekkel.

Három, nem egy síkba eső $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ és $\vec{\mathbf{e}}_3$ vektor bázist alkot: minden vektor egyértelműen előállítható a lineáris kombinációjukként, azaz bármely $\vec{\mathbf{a}}$ vektor előáll

$$\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2 + a_3\vec{\mathbf{e}}_3$$

alakban valamely a_1, a_2 és a_3 skalár együtthatókkal, az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ bázisra vonatkozó vektorkomponenseivel.

Egy másik $\{\vec{\mathbf{e}}'_1, \vec{\mathbf{e}}'_2, \vec{\mathbf{e}}'_3\}$ bázisra vonatkozó a'_i komponensek az a_i-k lineáris kifejezése

$$a'_i = \sum_j T_{ij} a_j$$

ahol T_{ij} a bázistranszformáció mátrixa.

Elemi vektorműveletek kifejezése vektorkomponensekkel (dimenziótlan bázisvektorok)

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}})_i = \alpha a_i$$
$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})_i = a_i + b_i$$

Ortonormált bázis: egységnyi hosszú, kölcsönösen merőleges (ortogonális) vektorokból álló bázis.

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Észrevétel. $\texttt{vol}(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) = \pm 1$ bármely ortonormált bázisra, pozitív előjellel jobbsodrású, és negatív előjellel balsodrású esetben.

Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor komponenseinek kifejezése egy $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ ortonormált bázisra vonatkozóan

$$a_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_i$$

míg a különféle vektorszorzatok kifejezése

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{\mathbf{e}}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{\mathbf{e}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{\mathbf{e}}_3$$

és

$$\texttt{vol}\big(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\big) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

2. Tenzorok

Tenzor: vektorok közti

$$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}} : \vec{\mathbf{x}} \mapsto \overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}})$$

lineáris megfeleltetés, azaz

$$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) = \alpha\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{a}}) + \beta\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{b}})$$

bármely α, β skalárokra és $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ vektorokra.

Példák tenzormennyiségekre: tehetetlenségi tenzor, deformációs tenzor, feszültségtenzor, stb.

Egy $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ bázisra vonatkozóan az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ tenzor jellemezhető az

$$\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\right] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix segítségével, melynek A_{ij} elemeit az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{e}}_i) = \sum_{j=1}^{3} A_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j$ összefüggés határozza meg.

Példák:

1. A $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{0}} : \vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$ zérustenzor, amely minden vektorhoz a zérusvektort rendeli (mátrixának minden eleme zérus).

2. Az $\vec{\vec{\mathbf{I}}} : \vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ identitástenzor, amely minden vektort önmagába visz; mátrixa az $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ egységmátrix.

3. Az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok diadikus szorzata az

$$\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}} : \vec{\mathbf{x}} \mapsto (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\, \vec{\mathbf{a}}$$

tenzor, melynek (ortonormált bázisra vonatkozó) mátrixa

$$\left[\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}\right] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Műveletek:

1. Egy α skalár és egy $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ tenzor szorzata az $\alpha\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}:\vec{\mathbf{x}}\mapsto\alpha\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}})$ tenzor, melynek mátrixa $\left[\alpha\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\right]=\alpha\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\right]$.

2. Egy $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ tenzor és egy $\vec{\mathbf{a}}$ vektor szorzata az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{a}})$ vektor.

3. Az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ és $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}$ tenzorok összege az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}:\vec{\mathbf{x}}\mapsto\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}})+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}})$ tenzor, melynek mátrixa $\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}\right]=\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\right]+\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}\right]$.

4. Az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ és $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}$ tenzorok szorzata az $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}:\vec{\mathbf{x}}\mapsto\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\left(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}})\right)$ tenzor, melynek mátrixa $\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}\right]=\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}\right]\left[\overset{\Rightarrow}{\mathbf{B}}\right]$.

5. Egy $\vec{\mathbf{a}}$ vektor és egy $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}$ tenzor keresztszorzata az $\vec{\mathbf{a}}\times\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}:\vec{\mathbf{x}}\mapsto\vec{\mathbf{a}}\times\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}})$ tenzor.

$$\vec{\vec{\mathbf{A}}} + \left(\vec{\vec{\mathbf{B}}} + \vec{\vec{\mathbf{C}}}\right) = \left(\vec{\vec{\mathbf{A}}} + \vec{\vec{\mathbf{B}}}\right) + \vec{\vec{\mathbf{C}}}$$

$$\vec{\vec{\mathbf{A}}} + \vec{\vec{\mathbf{B}}} = \vec{\vec{\mathbf{B}}} + \vec{\vec{\mathbf{A}}}$$

$$\vec{\vec{\mathbf{A}}} \cdot \left(\vec{\vec{\mathbf{B}}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{C}}}\right) = \left(\vec{\vec{\mathbf{A}}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{B}}}\right) \cdot \vec{\vec{\mathbf{C}}}$$

$$(\alpha\vec{\vec{\mathbf{A}}} + \beta\vec{\vec{\mathbf{B}}}) \cdot \vec{\vec{\mathbf{C}}} = \alpha(\vec{\vec{\mathbf{A}}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{C}}}) + \beta(\vec{\vec{\mathbf{B}}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{C}}})$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) \circ \vec{\mathbf{c}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{c}}) + \beta(\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{c}})$$

$$\vec{\mathbf{c}} \circ (\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) = \alpha(\vec{\mathbf{c}} \circ \vec{\mathbf{a}}) + \beta(\vec{\mathbf{c}} \circ \vec{\mathbf{b}})$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\vec{\mathbf{A}}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\vec{\mathbf{A}}}) + \beta(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\vec{\mathbf{A}}})$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\alpha\vec{\vec{\mathbf{A}}} + \beta\vec{\vec{\mathbf{B}}}) = \alpha(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\vec{\mathbf{A}}}) + \beta(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\vec{\mathbf{B}}})$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \circ \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{d}})$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \circ \vec{\mathbf{c}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\vec{\mathbf{A}}}) = (\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\vec{\mathbf{A}}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\vec{\mathbf{A}}}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\vec{\mathbf{A}}} = (\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\vec{\mathbf{A}}}$$

3. Skalár-, vektor- és tenzormezők

Skalár-(vektor-/tenzor-)mező: adott tenzori jellegű helyfüggő mennyiség.

Szemléletes geometriai jellemzés:

- skalármező szintfelületei, melyek mentén a vizsgált mező konstans értékeket vesz fel;
- vektormező erővonalai (áramgörbéi), mely görbék érintője minden pontban párhuzamos a vektormező irányával, míg lokális sűrűségük arányos a mező nagyságával.

Térbeli pontok jellemezhetők az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorukkal, azaz egy tetszőlegesen választott referenciapontból – az origóból – a vizsgált pontba mutató vektorral.

Helyfüggő mennyiségek jellemezhetők a helyvektor függvényeivel, amelyek megadják az egyes mennyiségek értékét a különböző $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú pontokban.

Alternatív módon, egy helyfüggő mennyiség jellemezhető az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektor adott bázisra vonatkozó vektorkomponenseinek háromváltozós függvényével.

4. Görbevonalú koordináták

Görbevonalú koordináták: háromdimenziós tér pontjainak jellemzése $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}$ valós számhármasokkal, ahol $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ egy olyan részhalmaz (fundamentális tartomány), melynek két különböző belső pontja két különböző térbeli pontnak felel meg (határra ez már nem szükségszerű).

Görbevonalú koordináták választása tetszőleges, csak praktikus megfontolások befolyásolják (pl. szimmetria).

Görbevonalú koordináták választását jellemző $\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$ összefüggés minden $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}$ számhármas esetén megadja a megfelelő térbeli pont helyvektorát.

Konverziós függvények: különféle görbevonalú koordináták közti átváltást jellemző $u'_i(u_1, u_2, u_3)$ függvények, melyekre $\vec{\mathbf{r}}(u'_1, u'_2, u'_3) = \vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$.

Ortogonális koordináták: $G_{ij} = \dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i} \cdot \dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_j} = 0$ ha $i \neq j$.

Lamé–együtthatók: $\ell_i = \left| \dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i} \right|$.

Ívelem: infinitezimálisan közeli $\big(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3\big)$ és (u_1, u_2, u_3) görbevonalú koordinátájú pontok közti távolság négyzete

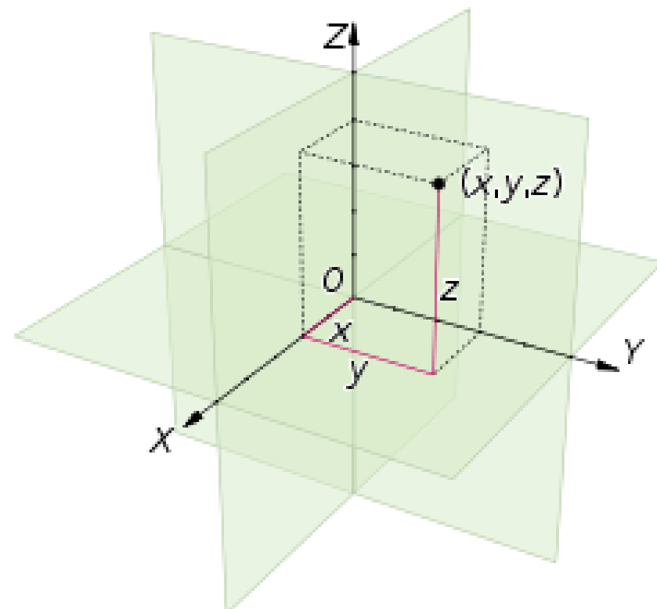
$$ds^2 = \ell_1^2\, du_1^2 + \ell_2^2\, du_2^2 + \ell_3^2\, du_3^2$$

Térfogatelem

$$\mathscr{V} = \mathtt{vol}\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_1}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_3}\Big) = \pm\ell_1\ell_2\ell_3$$

Példák:

1. (x, y, z) Descartes-koordináták, ahol $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \,|\, -\infty < x, y, z < +\infty\}$



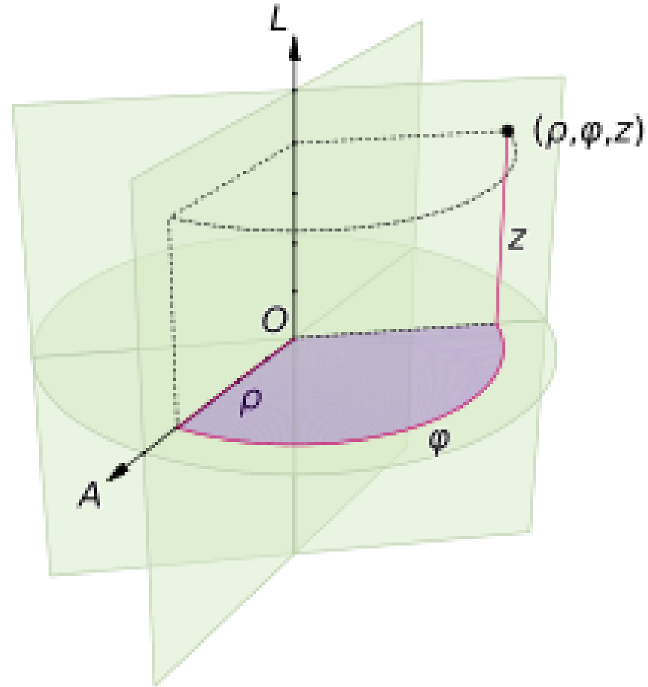
$\vec{\mathbf{r}}(x, y, z) = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 + z\vec{\mathbf{e}}_3$

Lamé–együtthatók: $\ell_x = \ell_y = \ell_z = 1$

Térfogatelem: $\mathscr{V} = 1$

2. (ϱ, φ, z) hengerkoordináták

$$\mathcal{D} = \{(\varrho, \varphi, z)\,|0 \le \varrho < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$$



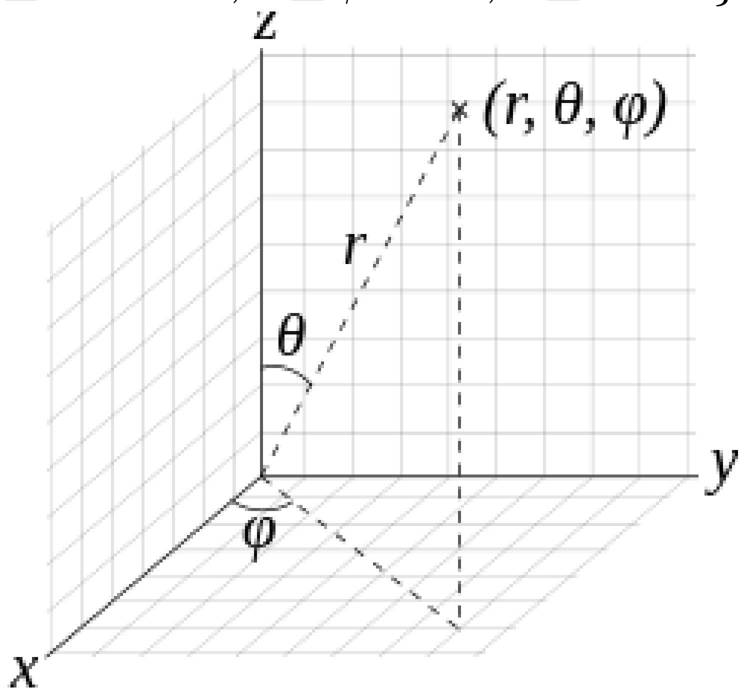
$$\vec{\mathbf{r}}(\varrho, \varphi, z) = \varrho \cos\varphi\, \vec{\mathbf{e}}_1 + \varrho \sin\varphi\, \vec{\mathbf{e}}_2 + z\, \vec{\mathbf{e}}_3$$

Lamé–együtthatók: $\ell_\varrho = \ell_z = 1$ és $\ell_\varphi = \varrho$

Térfogatelem: $\mathscr{V} = \varrho$

3. (r, ϕ, ϑ) gömbkoordináták

$$\mathcal{D} = \{(r, \phi, \vartheta)\,|0 \leq r < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi\}$$



$$\vec{\mathbf{r}}(r, \phi, \vartheta) = r\cos\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + r\sin\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_2 + r\cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

Lamé–együtthatók: $\ell_r = 1$, $\ell_\phi = r\sin\vartheta$ és $\ell_\vartheta = r$

Térfogatelem: $\mathscr{V} = r^2\sin\vartheta$

1. Descartes-koordináták $\leftrightarrow$ hengerkoordináták:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = \varrho \cos\varphi$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

$$z = z$$

2. Descartes-koordináták $\leftrightarrow$ gömbkoordináták:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = r\cos\phi\sin\vartheta$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = r\sin\phi\sin\vartheta$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \qquad z = r\cos\vartheta$$

Helyfüggő lokális bázisvektorok

$$\boxed{\vec{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{\ell_i} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i}}$$

Ortogonális koordináták esetén ortonormált bázist alkotnak.

Vektor- és tenzorkomponenseket a lokális $\vec{\mathbf{e}}_i(\vec{\mathbf{r}})$ bázisra szokás vonatkoztatni

$$\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{w}_i(\vec{\mathbf{r}})\, \vec{\mathbf{e}}_i(\vec{\mathbf{r}})$$

$\mathrm{w}_i(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{e}}_i(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ ortogonális koordináták esetén.

Példák

1. Descartes-koordináták $\vec{\mathbf{r}}(x,y,z) = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 + z\vec{\mathbf{e}}_3$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial x} = \vec{\mathbf{e}}_1 \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial y} = \vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial z} = \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathfrak{e}}_x = \vec{\mathbf{e}}_1 \qquad \vec{\mathfrak{e}}_y = \vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \vec{\mathfrak{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathfrak{e}}_x + y\vec{\mathfrak{e}}_y + z\vec{\mathfrak{e}}_z}$$

2. Hengerkoordináták $\vec{\mathbf{r}}(\varrho,\varphi,z) = \varrho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \varrho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 + z\,\vec{\mathbf{e}}_3$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\varrho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\varrho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \varrho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial z} = \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathfrak{e}}_\varrho = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \vec{\mathfrak{e}}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 - \sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 \qquad \vec{\mathfrak{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}} = \varrho\vec{\mathfrak{e}}_\varrho + z\vec{\mathfrak{e}}_z}$$

3. Gömbkoordináták

$$\vec{\mathbf{r}}(r,\phi,\vartheta) = r\cos\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + r\sin\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_2 + r\cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathfrak{e}}_r = \cos\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathfrak{e}}_\phi = \cos\phi\,\vec{\mathbf{e}}_2 - \sin\phi\,\vec{\mathbf{e}}_1$$

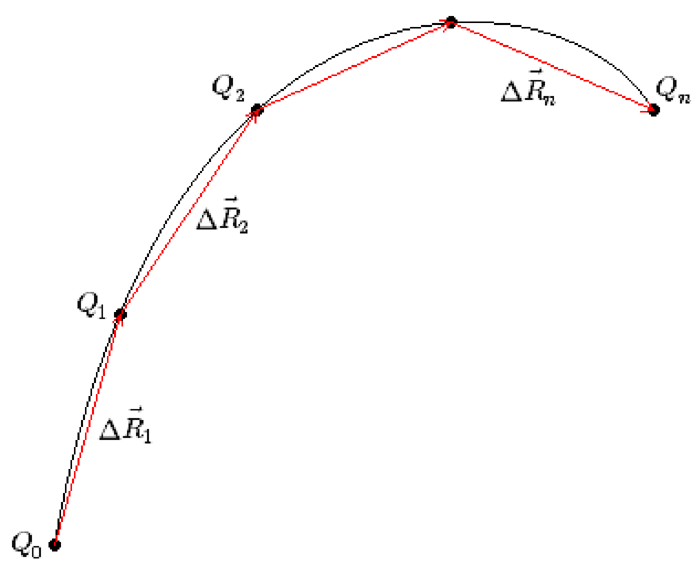
$$\vec{\mathfrak{e}}_\vartheta = \cos\phi\cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\phi\cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_2 - \sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathfrak{e}}_r}$$

Helyvektornak csak radiális komponense van!

5. Vonalmenti integrálok

Tekintsünk egy $\boldsymbol{\Gamma}$ folytonos görbét és egy $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. A $\boldsymbol{\Gamma}$ görbe minden $\boldsymbol{\Gamma} = \cup_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Gamma}_i$ felosztására át nem lapoló kis darabokra jelölje $\vec{\mathbf{r}}_i$ a $\boldsymbol{\Gamma}_i$ valamely pontját és $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ a kezdőpontjából a végpontjába mutató vektort.



Ahogy a felosztást finomítjuk, azaz $\max_i |\Delta\vec{\mathbf{r}}_i|$ (görbeszakaszok hossza) egyre kisebb és kisebb lesz, a

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$$

összeg – ahol $\star$ valamely (skaláris, vektoriális vagy diadikus) szorzatot jelöl – egy

$$\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

határértékhez tart, az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség $\boldsymbol{\Gamma}$-menti vonalintegráljához.

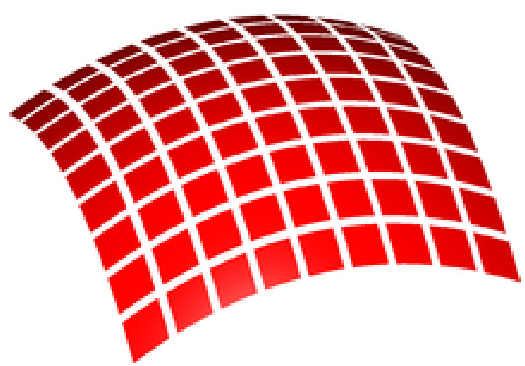
Skalár- vagy tenzormennyiség vonalintegrálja mindig vektor, viszont egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőnek négy különböző vonalintegrálja képezhető: egy $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ skaláris, egy $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ vektoriális és két tenzoriális, $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \circ \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ illetve $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} \circ \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$.

A görbe egy $\vec{\mathbf{r}}(t)$ parametrizációja esetén a vonalintegrál számolása egy határozott integrál meghatározására vezethető vissza az alábbi képlet segítségével (a görbe kezdőpontja $\vec{\mathbf{r}}(0)$, míg $\vec{\mathbf{r}}(1)$ a végpontja)

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{0}^{1} \left(\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \star \frac{\mathsf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathsf{d}t} \right) \mathsf{d}t$$

6. Felületi integrálok

Tekintsünk egy $\boldsymbol{\Sigma}$ felületet és egy azon értelmezett, tetszőleges tenzori jellegű $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. Osszuk fel a felületet kicsiny, át nem lapoló $\boldsymbol{\Sigma}_i$ darabokra: ezek mindegyikét jellemezhetjük valamely belső pontjuk $\vec{\mathbf{r}}_i$ helyvektorával és $\vec{\boldsymbol{\Delta}\mathfrak{s}}_i$ felületelem-vektorukkal, melynek nagysága a felületdarab $|\boldsymbol{\Sigma}_i|$ területe, és iránya az $\vec{\mathbf{r}}_i$ pontbeli normális (felületre merőleges) irányba mutat.



Ahogy a felosztás finomodik, azaz $\max_i |\mathbf{\Sigma}_i|$ egyre kisebb lesz, a

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}_i$$

összeg (tetszőleges $\star$ szorzatra) a

$$\int_{\mathbf{\Sigma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

határértékhez tart, az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség $\mathbf{\Sigma}$ feletti felületi integráljához.

Skalár- vagy tenzormennyiség felületi integrálja mindig vektor, viszont egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőnek négy különböző felületi integrálja képezhető: egy $\int_{\mathbf{\Sigma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ skaláris, egy $\int_{\mathbf{\Sigma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ vektoriális és két tenzoriális, $\int_{\mathbf{\Sigma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \circ \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ illetve $\int_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} \circ \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$.

Ha adott a felület egy $\vec{\mathbf{r}}(u,v)$ parametrizációja, ahol $(u,v) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, a felületi integrál az alábbi képlet alapján egy kettős integrálra redukálódik

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left\{ \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}\,(u,v)) \star \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \right) \right\} \mathsf{d}u \mathsf{d}v$$

Bizonyos esetekben az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i)$ értékeket nem a $\vec{\boldsymbol{\Delta}}\mathfrak{s}_i$ felületelemmel súlyozzuk, hanem csak annak $|\vec{\boldsymbol{\Delta}}\mathfrak{s}_i|$ nagyságával. Az így adódó $\int\limits_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})\, |\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}|$ felületi integrálnak ugyanaz a tenzori jellege mint az $\mathcal{A}$ integrandusnak, és $\boldsymbol{\Sigma}$ területét az alábbi képlet adja

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Sigma}} 1 |\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}| = |\boldsymbol{\Sigma}|$$

7. Térfogati integrálok

Tekintsünk egy $\mathcal{V}$ térrészt és egy azon értelmezett $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. Osszuk fel a térrészt kicsiny, át nem lapoló $\mathcal{V}_i$ részekre, melyek mindegyikét jellemzi $|\mathcal{V}_i|$ térfogata és valamely belső pontjuk $\vec{\mathbf{r}}_i$ helyvektora. Ahogy a felosztás finomodik ($\max\limits_i |\mathcal{V}_i|$ egyre kisebb lesz), a

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i)\,|\mathcal{V}_i|$$

összeg egy véges határértékhez tart, az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség $\mathcal{V}$ feletti

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

térfogati integráljához.

A térfogati integrál tenzori jellege ugyanaz, mint az integrandusé, és a $\mathcal{V}$ térrész (előjeles) térfogata egyenlő az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) = 1$ konstans függvény tréfogati integráljával:

$$|\mathcal{V}| = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

Ha adott a térrész egy $\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$ parametrizációja $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ görbevonalú koordináták segítségével, akkor a térfogati integrál átalakítható egy hármas integrállá

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \iiint_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3))\,\mathtt{vol}\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_1}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_3}\Big)\mathtt{d}u_1\mathtt{d}u_2\mathtt{d}u_3$$

8. Gradiens és iránymenti derivált

Egy $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező gradiense a

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

képlet segítségével értelmezett vektormező, ahol a határértéket úgy kell képezni, hogy a $|\mathcal{V}|$ térfogatú és $\partial\mathcal{V}$ határoló felületű $\mathcal{V}$ térrészt egy pontra zsugorítjuk. Hasonlóképpen, egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező gradiense a

$$\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}} = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \circ \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$$

tenzormező, ahol a határátmenet ugyanaz, mint a skaláris esetben.

A gradiens additív és teljesíti a Leibniz–szabályt, vagyis bármely $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ és $\Psi(\vec{\mathbf{r}})$ skalár-, illetve $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ és $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezők esetén

$$
\begin{aligned}
\mathbf{grad}(\Phi+\Psi) &= \mathbf{grad}\,\Phi + \mathbf{grad}\,\Psi \\
\mathbf{grad}(\vec{\mathbf{w}}+\vec{\mathbf{v}}) &= \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}} + \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{v}} \\
\mathbf{grad}(\Phi\Psi) &= \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\Psi + \Psi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\Phi \\
\mathbf{grad}(\Phi\,\vec{\mathbf{w}}) &= \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}} + \mathbf{grad}\,\Phi\circ\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})
\end{aligned}
$$

Megmutatható, hogy bármely konstans $\vec{\mathbf{n}}$ egységvektor esetén

$$
\mathbf{grad}\,\mathcal{A}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}+\varepsilon\vec{\mathbf{n}}) - \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon}
$$

legyen $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ akár skalár-, akár vektormező; a határérték az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség változási sebességét adja meg az $\vec{\mathbf{n}}$ irányában (irány menti derivált)

$\rightsquigarrow$ skalármező gradiense a leggyorsabb változás irányába mutat.

$\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező gradiense különféle görbevonalú koordinátákban:

Descartes-koordináták

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\vec{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\vec{\mathbf{e}}_z$$

Hengerkoordináták

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\,\vec{\mathbf{e}}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\vec{\mathbf{e}}_z$$

Gömbkoordináták

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\,\vec{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\,\vec{\mathbf{e}}_\vartheta$$

Egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező gradiensének kifejezése Descartes-koordináták segítségével

$$\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}} = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial x_j}\ \vec{\mathbf{e}}_i \circ \vec{\mathbf{e}}_j$$

Végül, amennyiben $\psi(x)$ egy tetszőleges egyváltozós skalárfüggvény és $\vec{\mathbf{a}}$ egy konstans vektor, akkor

$$\mathbf{grad}\,\psi(|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|) = \psi'(|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|)\frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|}$$

és

$$\mathbf{grad}\big\{\psi(|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|)(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}})\big\} = \frac{\psi'(|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|}\left\{3(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}})\circ(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}) - |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|^2 \overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}}\right\}$$

9. Divergencia és rotáció

Egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}$ divergenciáját és $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}$ rotációját az alábbi módon értelmezzük

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}} = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}} = \lim \frac{\text{-1}}{|\mathcal{V}|} \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

ahol a határértéket úgy kell képezni, hogy a $|\mathcal{V}|$ térfogatú és $\partial\mathcal{V}$ határoló felületű $\mathcal{V}$ térrészt egy pontra zsugorítjuk. Egy vektormező divergenciája skalármező, míg rotációja vektormező.

Egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező divergenciájának és rotációjának kifejezése különféle görbevonalú koordináták segítségével:

Descartes-koordináták

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathrm{w}_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{w}_y}{\partial z}\right)\vec{\mathfrak{e}}_x + \left(\frac{\partial \mathrm{w}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial x}\right)\vec{\mathfrak{e}}_y + \left(\frac{\partial \mathrm{w}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{w}_x}{\partial y}\right)\vec{\mathfrak{e}}_z$$

Hengerkoordináták

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathrm{w}_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{\mathrm{w}_\varrho}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathrm{w}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathrm{w}_\varphi}{\partial z}\right)\vec{\mathfrak{e}}_\varrho + \left(\frac{\partial \mathrm{w}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{w}_z}{\partial \varrho}\right)\vec{\mathfrak{e}}_\varphi + \left(\frac{\mathrm{w}_\varphi}{\varrho} + \frac{\partial \mathrm{w}_\varphi}{\partial \varrho} - \frac{\partial \mathrm{w}_\varrho}{\partial \varphi}\right)\vec{\mathfrak{e}}_z$$

Gömbkoordináták

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathrm{w}_r}{\partial r} + \frac{2\mathrm{w}_r}{r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{w}_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{w}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\mathrm{w}_\vartheta}{r\tan\vartheta}$$

és

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}} = \left(\frac{\mathrm{w}_\phi}{r\tan\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{w}_\phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathrm{w}_\vartheta}{\partial \phi}\right)\vec{\mathfrak{e}}_r$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathrm{w}_\vartheta}{\partial r} + \frac{\mathrm{w}_\vartheta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{w}_r}{\partial \vartheta}\right)\vec{\mathfrak{e}}_\phi + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{w}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathrm{w}_\phi}{\partial r} - \frac{\mathrm{w}_\phi}{r}\right)\vec{\mathfrak{e}}_\vartheta$$

Egy $\vec{\vec{\mathbf{T}}}(\vec{\mathbf{r}})$ tenzormező divergenciája a

$$\mathbf{div}\,\vec{\vec{\mathbf{T}}} = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \vec{\vec{\mathbf{T}}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

vektormező, a szokásos módon képezve a határértéket (egy pontra zsugorítva $\mathcal{V}$ térrészt). Vektorkomponensei Descartes-koordinátákban

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\vec{\vec{\mathbf{T}}} = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)\vec{\mathfrak{e}}_x \; &+ \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)\vec{\mathfrak{e}}_y \\ &+ \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)\vec{\mathfrak{e}}_z\end{aligned}$$

Egy $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalár-, $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor- és $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}})$ tenzormező esetén

$$\mathbf{div}(\Phi\,\vec{\mathbf{w}}) = \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{grad}\,\Phi$$

$$\mathbf{rot}(\Phi\,\vec{\mathbf{w}}) = \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}} + \mathbf{grad}\,\Phi\times\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{div}(\Phi\overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}) = \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{div}\,\overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}} + \overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{grad}\,\Phi$$

míg $\vec{\mathbf{w}}_1(\vec{\mathbf{r}})$ és $\vec{\mathbf{w}}_2(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezők esetén

$$\mathbf{div}(\vec{\mathbf{w}}_1+\vec{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}_2$$

$$\mathbf{rot}(\vec{\mathbf{w}}_1+\vec{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_2$$

$$\mathbf{grad}(\vec{\mathbf{w}}_1\cdot\vec{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}_1\cdot\vec{\mathbf{w}}_2+\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}_2\cdot\vec{\mathbf{w}}_1+\vec{\mathbf{w}}_1\times\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_2+\vec{\mathbf{w}}_2\times\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_1$$

$$\mathbf{div}(\vec{\mathbf{w}}_1\times\vec{\mathbf{w}}_2) = \vec{\mathbf{w}}_2\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_1 - \vec{\mathbf{w}}_1\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}_2$$

$$\mathbf{rot}(\vec{\mathbf{w}}_1\times\vec{\mathbf{w}}_2) = (\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}_1-\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}_1)\cdot\vec{\mathbf{w}}_2-(\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}_2 - \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}_2)\cdot\vec{\mathbf{w}}_1$$

$$\mathbf{div}(\vec{\mathbf{w}}_1\circ\vec{\mathbf{w}}_2) = \vec{\mathbf{w}}_1\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}_2 + \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}_1\cdot\vec{\mathbf{w}}_2$$

10. Fundamentális azonosságok

Minden $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármezőre

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,\Phi) = \vec{\mathbf{0}}}$$

és minden $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőre

$$\boxed{\mathbf{div}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}) = 0}$$

továbbá

$$\boxed{\mathbf{div}(\mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}})}$$

11. Laplace-operátor

A (skaláris) Laplace–operátor minden $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármezőhöz hozzárendeli a $\boldsymbol{\Delta}\Phi$ skalármezőt, amely gradiensének divergenciájával egyenlő:

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\Phi = \mathbf{div}(\mathbf{grad}\,\Phi)}$$

A vektoriális Laplace–operátor egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőhöz hozzárendeli a

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}})}$$

vektormezőt.

Mindkét Laplace–operátor lineáris:

$$\boldsymbol{\Delta}\,(\Phi_1+\Phi_2)=\boldsymbol{\Delta}\Phi_1+\boldsymbol{\Delta}\Phi_2 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\Delta}\,(\vec{\mathbf{w}}_1+\vec{\mathbf{w}}_2)=\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}}_1+\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}}_2$$

Skaláris Laplace–operátor kifejezése különböző koordináta-rendszerekben

Descartes-koordináták

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Hengerkoordináták

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Gömbkoordináták

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)$$

A vektoriális Laplace–operátor kifejezése Descartes-koordináták segítségével

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_x + \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_y + \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_z$$

Vagyis a vektoriális Laplace–operátor hatását úgy kaphatjuk meg, hogy a skaláris Laplace–operátort alkalmazzuk a $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező minden egyes Descartes–komponensére külön-külön.

12. Integráltételek

Az egyváltozós függvényekre vonatkozó klasszikus

$$\int_a^b f'(x)\,\mathsf{d}x = f(b) - f(a)$$

Newton-Leibniz–formula (integrálszámítás alaptétele) általánosításai különféle tenzori jellegű integrandusokra (skalár-, vektor- és tenzormezők) és magasabb dimenziós integrációs tartományokra (görbék, felületek és térrészek).

12.1. A gradiens-tétel

Bármely $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalár- és $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező esetén

$$\int_{\gamma} \mathbf{grad}\,\Phi \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \Phi(\gamma_+) - \Phi(\gamma_-)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{w}}(\gamma_+) - \vec{\mathbf{w}}(\gamma_-)$$

ahol γ egy folytonos görbét jelöl γ_- kezdő- és γ_+ végponttal.

Az integrálszámítás alaptételének legközvetlenebb általánosításai.

12.2. Stokes tétele és variánsai

Jelöljön $\mathbf{\Sigma}$ egy felületet $\partial\mathbf{\Sigma}$ határoló görbével. Ekkor bármely $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalár- és $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező esetén

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \qquad \text{Stokes–tétel}$$

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} \Phi(\vec{\mathbf{r}})\ \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = -\int\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{grad}\,\Phi\times\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

továbbá

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})\times\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\mathcal{S}} \{\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}\times\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}\,\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} - \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}\}$$

12.3. A divergencia-tétel és következményei

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}\;\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \qquad \text{Gauss–tétel}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}\;\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = -\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})\times\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}\;\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\Phi\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \Phi(\vec{\mathbf{r}})\;\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}\circ\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$$

bármely $\mathcal{V}$ térrészre melyet a $\partial\mathcal{V}$ felület határol, és minden $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalár-, $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor- illetve $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}})$ tenzormezőre.

Észrevétel. Abban a határesetben, ha a $\mathcal{V}$ térrész egyetlen pontra zsugorodik, a divergencia-tétel fenti változatai rendre automatikusan teljesülnek a gradiens, divergencia és rotáció definíciói alapján.

A Gauss–tételt a $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ és $\Psi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármezőkből képzett $\Psi\,\mathbf{grad}\,\Phi$ vektormezőre alkalmazva adódik Green első tétele

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \{\Psi(\vec{\mathbf{r}})\,\boldsymbol{\Delta}\Phi + \mathbf{grad}\,\Phi\cdot\mathbf{grad}\,\Psi\}\ \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \Psi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\Phi\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

A fenti összefüggésben felcserélve Φ-t és Ψ-t, és az eredményt kivonva az előzőből kapjuk Green második tételét

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \{\Psi(\vec{\mathbf{r}})\,\boldsymbol{\Delta}\Phi - \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\boldsymbol{\Delta}\Psi\}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \{\Psi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\Phi - \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{grad}\,\Psi\}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

ahonnan $\Psi(\vec{\mathbf{r}})=1$ választással

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\Delta}\Phi\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\Phi\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}}$$

Hasonlóképpen, egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező gradiensére alkalmazva a divergencia-tételt

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \{\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}}\times\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} - \mathbf{grad}\,\vec{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}\}$$