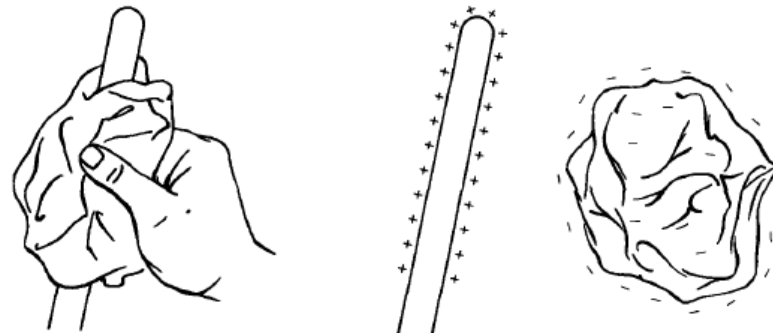


## Alapjelenségek

### 1. Elektromos töltések és kölcsönhatásaik

Thalész megfigyelése: gyapjúval dörzsölt borostyánkő magához vonz, majd később eltaszít apró, könnyű tárgyakat.



**Elektromos töltés:** fenti viselkedésért felelős tulajdonság.

# 1 ELEKTROMOS TÖLTÉSEK

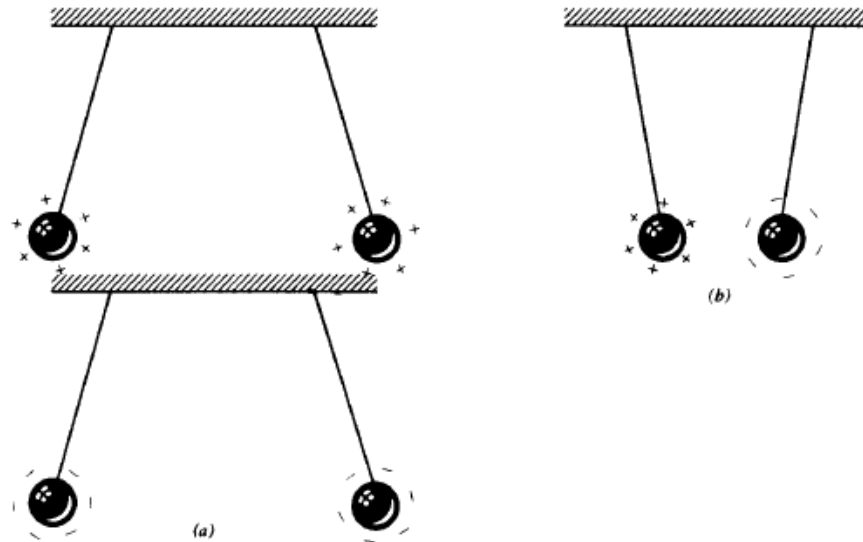
---

Töltött testek vonzzák vagy taszítják egymást (gravitációval ellentétben): egy három töltött testből álló rendszerben vagy

a) mindhárman taszítják egymást, vagy

b) ketten taszítják egymást miközben mindketten vonzzák a harmadikat

↪ kétféle elektromos töltés ('pozitív' és 'negatív') létezik: az azonos előjelű töltések taszítják, a különböző előjelűek vonzzák egymást.



# 1 ELEKTROMOS TÖLTÉSEK

---

Különböző előjelű töltések vonzása  $\rightsquigarrow$  törekvés a **töltéssemlegességre**, vagyis a makroszkopikus testekben található töltések kiegyenlítődére.

Miért nincs teljes töltéssemlegesség?

1) Az atomokat alkotó elemi részecskék (elektronok, protonok, stb.) elektromos töltése kvantált, mindig az **elemi töltés** egész számú többszöröse (kivéve a kvarkokat, ahol annak  $1/3$  része).

2) Az atommagok tömege négy-öt nagyságrenddel nagyobb, mint az elektronoké, ezért a **pozitív töltésű atommagok sokkal kisebb térfogatban lokalizálódnak a határozatlansági reláció miatt, mint a negatív töltésű elektronok ('elektron-felhő')**.

$\rightsquigarrow$

pozitív és negatív töltések szétválnak atomi szinten.

# 1 ELEKTROMOS TÖLTÉSEK

---

*Megjegyzés:* tömegek különbözősége fontos, lásd inverz béta-bomlás, ill. pozitronium (elektron-pozitron kötött állapot) annihilációja.

Mikroszkopikus töltésszétvállás miatt egy makroszkopikus töltött test leírható ponttöltések (elhanyagolható méretű elektromos töltések) folytonos eloszlásával., melyet a töltéssűrűség (egységnyi térfogatban vagy felületen található elektromos töltés mennyisége) jellemez.

Töltött testek rendszerének elektromos hatása jellemezhető próbatöltésekre (olyan ponttöltések, amelyek elektromos befolyása elhanyagolható) kifejtett erőhatások révén: elektromos mező.

# 1 ELEKTROMOS TÖLTÉSEK

---

Töltött testek rendszere által a tér egyazon pontjába elhelyezett két különböző próbatöltésre egyazon időben kifejtett elektromos erők mindig párhuzamosak egymással, és nagyságuk aránya csak a próbatöltésektől függ, de független az elektromos mezőt létrehozó töltések rendszerétől.

*Következmény:* az  $\vec{r}$  helyvektorú pontba elhelyezett próbatöltésre

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

erő hat, ahol  $q$  a próbatöltést jellemző skalár (annak **elektromos töltése**), míg  $\vec{E}(\vec{r})$  a töltésrendszer által létrehozott elektromos mezőt jellemző vektor, az **elektromos térerősség vektora**.

Vákuumban  $\vec{E}(\vec{r})$  teljes mértékben jellemzi az elektromos mezőt, de anyagi közegekben nem.

# 1 ELEKTROMOS TÖLTÉSEK

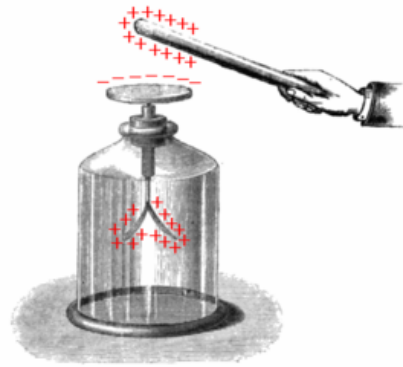
---

*Magyarázat:* bár az elektromos hatások forrásai az elektromos töltések, de a térerősség nem csak a mezőt létrehozó töltésektől függ, hanem a teret kitöltő közeg tulajdonságaitól is, mert a közeget alkotó atomok/molekulák mikroszkopikus töltéseloszlása (amelyet befolyásol a külső elektromos mező) kicsiny, de nem eltűnő járulékot ad a térerősséghez.

Mivel egy makroszkopikus térfogatban  $6 \cdot 10^{23}$  (Avogadro-szám) nagyságrendű molekulát találunk, és ezek elektromos hatásai felösszegződnek, így jelentősen különbözhet egyazon töltésrendszer mezejének térerőssége eltérő tulajdonságú közegekben.

### 2. Elektromos megosztás

Elektromos megosztás (elektrosztatikus indukció, Wilcke és Aepinus, 1763): töltetlen fémes testet külső elektromos mezőben két részre osztva a két rész közt vonzás lép fel, mert a két rész azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltésre tesz szert.



1. ábra. Elektrosztatikus indukció

## 2 ELEKTROMOS MEGOSZTÁS

---

Mikroszkopikus magyarázat: **fémekben az elektronok egy része delokalizált**, ezért könnyen elmozdul a külső elektromos mező hatására, és így **a test egyik részén felgyülemlemlenek**, ezáltal ott **negatív töltésfelesleget hoznak létre**, míg a test másik felén elektronhiány lép fel, miáltal pozitív töltésfelesleg jelentkezik.

Amennyiben az elválasztó felület elég kicsiny, akkor a megosztás során létrejövő töltés arányos annak területével, és függ normálisának irányától:

$$Q = \frac{1}{4\pi} |\vec{\mathbf{D}}| \cos \varphi \Delta \mathbf{s}$$

ahol  $\vec{\mathbf{D}}$  az elektromos mező megosztó képességét jellemző mennyiség – az **elektromos eltolás vektora** –,  $\Delta \mathbf{s}$  az elválasztó felület területe, míg  $\varphi$  az elválasztó felület normálisának a  $\vec{\mathbf{D}}$  irányával bezárt szöge.



Az  $\vec{\mathbf{E}}$  elektromos térerősség és a  $\vec{\mathbf{D}}$  eltolási vektor **együttesen jellemzik teljes mértékben az elektromos mező állapotát.**

*Megjegyzés:* vákuumban  $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}}$ , de anyagi közegekben általában  $\vec{\mathbf{D}} \neq \vec{\mathbf{E}}$  a közeget alkotó atomok és molekulák szintjén fellépő mikroszkopikus töltésszétválás miatt.

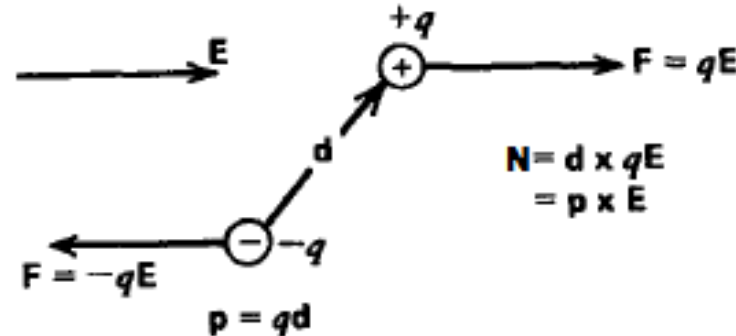
Mivel a töltésszétválás mértékét döntően befolyásolja a külső elektromos mező, ezért általában a **közeg anyagi összetételére jellemző**

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathbf{E}})$$

**függvénykapcsolat**, ún. **anyagi összefüggés** áll fenn.

### 3. Dipólusra ható erő és forgatónyomaték

**Elektromos dipólus:** két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ponttöltésből álló, elektromosan semleges rendszer (a ponttöltések közötti vonzást valamilyen más erőhatás kompenzálja).



A dipólusra ható erő és (a középpontra vonatkoztatott) forgatónyomaték az egyes töltésekre ható erők és forgatónyomatékok összege.

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}_+ - q\vec{\mathbf{E}}_- = q \left\{ \vec{\mathbf{E}}_+ - \vec{\mathbf{E}}_- \right\}$$

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{\vec{\mathbf{d}}}{2} \times q\vec{\mathbf{E}}_+ - \frac{\vec{\mathbf{d}}}{2} \times (-q)\vec{\mathbf{E}}_- = \frac{q\vec{\mathbf{d}}}{2} \times \left\{ \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- \right\}$$

ahol  $\vec{\mathbf{d}}$  a negatív ponttöltést a pozitívval összekötő vektor, míg  $\vec{\mathbf{E}}_{\pm}$  a térerősség az egyes töltések helyén.

Homogén (helyfüggetlen) elektromos mezőben  $\vec{\mathbf{E}}_+ = \vec{\mathbf{E}}_- = \vec{\mathbf{E}}$ , ezért  $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$  és  $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ , ahol  $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}}$  a dipólmomentum-vektor.

Homogén mezőben nem hat erő a dipólusra, de forgatónyomaték mindig hat rá, kivéve, ha a momentuma párhuzamos a térerősséggel, ezért a külső elektromos mező addig próbálja forgatni a dipólust, míg momentuma párhuzamos nem lesz a térerősséggel.

### 3 DIPÓLUSRA HATÓ ERŐ ÉS FORGATÓNYOMATÉK

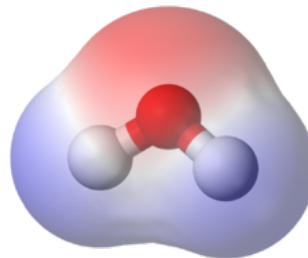
---

Inhomogén mezőbe helyezett **pontszerű dipólus** (amikor a **töltések közötti távolság elhanyagolható a mező inhomogenitásainak karakterisztikus méretéhez képest**) esetén, a forgatónyomaték továbbra is  $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$ , míg az erő

$$\vec{F} = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}$$

$\rightsquigarrow$  pontszerű dipólust jellemez a helyzete és a dipólmomentum-vektora.

**Poláros molekulák** (pl.  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HCl}$ ) töltéseloszlása aszimmetrikus, ezért **makroszkopikus skálán pontszerű dipólusként viselkednek**.



## 4. Töltött testre ható erő és forgatónyomaték

Makroszkopikus testre ható erő és forgatónyomaték származtatásához osszuk fel az általa kitöltött  $\mathcal{V}$  térrészt kicsiny  $\mathcal{V}_i$  részekre.

$\rho(\vec{\mathbf{r}})$  térfogati töltéssűrűség esetén az  $\vec{\mathbf{r}}_i$  középpontú,  $|\mathcal{V}_i|$  térfogatú rész elektromos töltése  $q_i = \rho(\vec{\mathbf{r}}_i) |\mathcal{V}_i|$ , így a rá ható erő és (az origóra vonatkoztatott) forgatónyomaték

$$\vec{\mathbf{F}}_i = q_i \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_i) = \rho(\vec{\mathbf{r}}_i) |\mathcal{V}_i| \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_i)$$

$$\vec{\mathbf{N}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i = \rho(\vec{\mathbf{r}}_i) |\mathcal{V}_i| \left( \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \right)$$

## 4 TÖLTÖTT TESTRE HATÓ ERŐ ÉS FORGATÓNYOMATÉK

---

A teljes erő és forgatónyomaték ezen tagok összege abban a határesetben, amikor a felosztást minden határon túl finomítjuk, így

$$\vec{\mathbf{F}} = \lim \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathbf{N}} = \lim \sum_i \vec{\mathbf{N}}_i = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) \{ \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

*Megjegyzés:* közel homogén töltéeloszlás esetén a sűrűség  $\rho(\vec{\mathbf{r}}) \approx \frac{Q}{|\mathcal{V}|}$ ,

ezért jó közelítéssel  $\vec{\mathbf{F}} \approx Q\vec{\mathbf{E}}_{\text{av}}$ , ahol

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{av}} = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

az átlagos térerősség és  $Q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$  a test össztöltése.

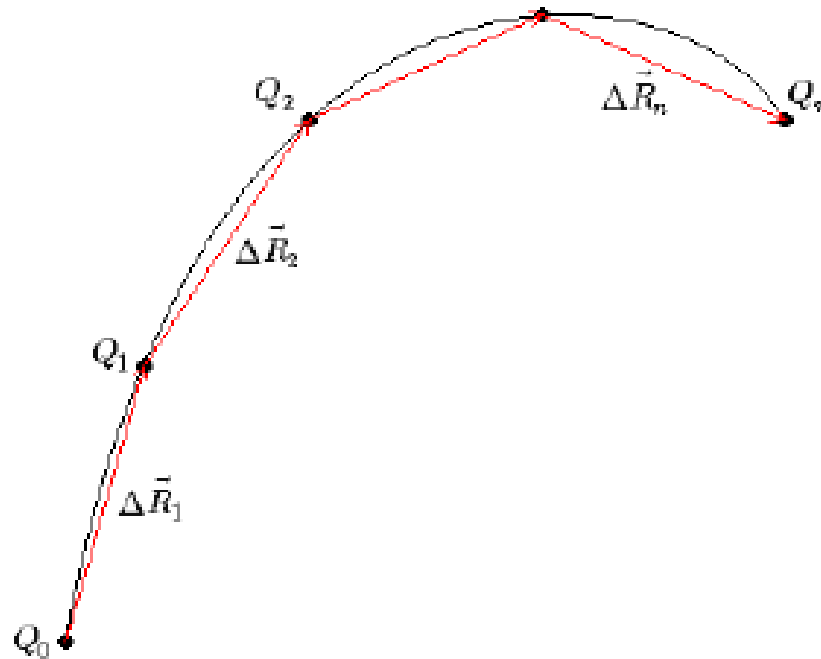
## 5. Geometriai integrálok

**Integrál:** folytonosan változó helyfüggő mennyiség súlyozott összege adott mértani alakzatra (határátmenet szükséges).

Különböző dimenziójú objektumok esetén más-más súlyozás: görbék esetén ívelem (vektor), felületek esetén felületelem (vektor), térrészek esetén térfogatelem (skalár).

**Vektormennyiség esetén** a különböző szorzatfogalmaknak megfelelően több lehetséges integrálfogalom létezik, pl. skaláris és vektoriális felületi integrálok.

**Vonalmenti integrálok:** legyen  $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$  a  $\Gamma$  folytonos görbe egy felosztása át nem lapoló, kis darabokra, és jelölje  $\Delta\vec{R}_i$  a  $\Gamma_i$  görbeszakasz kezdőpontjából a végpontjába mutató vektort (ívelem-vektor).





Jelöljön  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  egy helyfüggő mennyiséget, legyen  $\vec{\mathbf{r}}_i$  a  $\Gamma_i$  valamely belső pontjának helyvektora, és tekintsük a

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \Delta \vec{\mathbf{R}}_i$$

összeget, ahol  $\star$  valamilyen (skaláris vagy vektoriális) szorzást jelöl.

Ekkor [a felosztás finomításával](#), azaz ahogy  $\max_i |\Delta \vec{\mathbf{R}}_i|$  (a görbeszakaszok hossza) egyre kisebb és kisebb lesz, az összeg egy jól meghatározott

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star d\vec{\mathbf{r}}$$

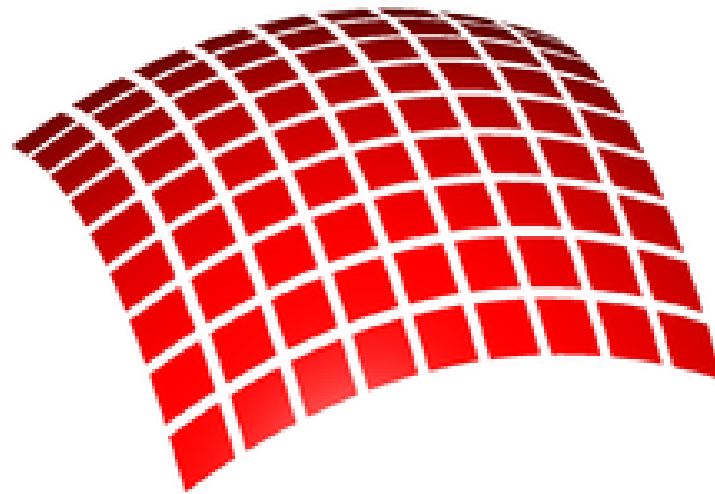
[határértékhez tart](#), az  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  mennyiség  [\$\Gamma\$ -menti vonalintegráljához](#).

Skalármennyiség vonalintegrálja mindig vektor, viszont egy  $\vec{w}(\vec{r})$  vektormezőnek két különféle vonalintegrálja létezik, egy  $\int_{\Gamma} \vec{w}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  skaláris és egy  $\int_{\Gamma} \vec{w}(\vec{r}) \times d\vec{r}$  vektoriális.

Ha ismert a görbe egy  $\vec{r}(t)$  parametrizációja (ahol  $\vec{r}(0)$  a görbe kezdőpontja, míg  $\vec{r}(1)$  a végpontja), akkor a vonalintegrál számolása egy határozott integrál meghatározására vezethető vissza az alábbi képlet segítségével

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A}(\vec{r}) \star d\vec{r} = \int_0^1 \left\{ \mathcal{A}(\vec{r}(t)) \star \frac{d\vec{r}}{dt} \right\} dt$$

**Felületi integrálok:** tekintsünk egy  $\Sigma$  felületet, és osszuk azt fel kicsiny, át nem lapoló  $\Sigma_i$  darabokra. Az  $\Sigma_i$  darabokat jellemezhetjük valamely belső pontjuk  $\vec{r}_i$  helyvektorával és  $\Delta\vec{s}_i$  **felületelem-vektorokkal**, mely **a felületdarabra merőleges (normális) irányba mutat**, és **nagysága a felületdarab  $|\Sigma_i|$  területe**.



Tekintsünk valamely  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  helyfüggő mennyiséget. Ahogy a felosztást finomítjuk, azaz  $\max_i |\Sigma_i|$  egyre kisebb lesz, a

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \Delta \vec{\mathbf{s}}_i$$

összeg (tetszőleges  $\star$  szorzat esetén) a

$$\int_{\Sigma} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star d\vec{\mathbf{s}}$$

határértékhez tart, az  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  mennyiség **felületi integráljához**.

Skalármennyiség felületi integrálja mindig vektor, viszont egy  $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$  vektormezőnek két különféle vonalintegrálja létezik, egy  $\int_{\Sigma} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$  skaláris és egy  $\int_{\Sigma} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times d\vec{\mathbf{r}}$  vektoriális.

Ha adott a felület egy  $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$  parametrizációja, akkor a felületi integrál az alábbi képlet alapján egy kettős integrálra redukálódik

$$\int_{\Sigma} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \iint \left\{ \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(u, v)) \star \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \right) \right\} du dv$$

Bizonyos esetekben az  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i)$  értékeket nem a  $\vec{\Delta}\mathbf{s}_i$  felületelem-vektorral súlyozzuk, hanem csak annak  $|\vec{\Delta}\mathbf{s}_i|$  nagyságával. Az így adódó  $\int_{\Sigma} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) |\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}|$  felületi integrálok fontos szerepet játszanak felületi eloszlások vizsgálatában, és például az alábbi kifejezést adják a felület felszínére

$$|\Sigma| = \int_{\Sigma} |\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}| = \iint \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| du dv$$

**Térfogati integrálok:** tekintsünk egy  $\mathcal{V}$  térrészt és egy azon értelmezett  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  helyfüggő mennyiséget. Osszuk fel a térrészt kicsiny, át nem lapoló  $\mathcal{V}_i$  részekre, melyek mindegyikét jellemzi  $|\mathcal{V}_i|$  térfogata és valamely belső pontjának  $\vec{\mathbf{r}}_i$  helyvektora. **Ahogy a felosztás finomodik**, azaz  $\max_i |\mathcal{V}_i|$  egyre kisebb lesz, a

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) |\mathcal{V}_i|$$

**összeg egy véges határértékhez tart**, az  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$  mennyiség

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3 \vec{\mathbf{r}}$$

**térfogati integráljához.**

Egy  $\mathcal{V}$  térrész (előjeles) térfogata egyenlő az  $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) = 1$  konstans függvény térfogati integráljával:

$$|\mathcal{V}| = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

A térfogati integrál tenzori jellege ugyanaz, mint az integrandusé, azaz skaláré skalár míg vektoré vektor, és ha ismert a térrész egy  $\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$  parametrizációja **görbevonalú koordináták** segítségével, akkor a **térfogati integrál átalakítható egy hármas integrállá**

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \iiint \left\{ \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)) \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_3} \right) \right\} du_1 du_2 du_3$$

### 6. Vezetők és szigetelők

Elektromos töltések áramlása lehet

- a) **konvektív** (makroszkopikus tömegárammal együtt járó, pl. elektromosan töltött makroszkopikus testek mozgása) vagy
- b) **konduktív** (mikroszkopikus töltéshordozók közegen belüli mozgása, melynek során nem lép fel tömegáram).

Egy anyagi közeg aszerint **vezető** vagy **szigetelő**, hogy fellépnek-e benne konduktív áramok vagy sem.

Egy közeg vezető voltának feltétele könnyen elmozduló mikroszkopikus töltéshordozók (pl. fémes kristályok delokalizált elektronjai) **jelenléte**.



Ideális szigetelő a **vákuum**, míg ideális vezetők a **szupravezetők**, amelyekben kvantum-effektusok következményeként külső elektromos mező nélkül is fellephetnek konduktív áramok.

Elektromos töltések áramlását a  $\vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  **áramsűrűség-vektor** jellemzi, melynek iránya az áramlás irányával párhuzamos, míg nagysága megadja az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló töltés mennyiségét.

Egy  $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  sebességeloszlású és  $\rho(\vec{\mathbf{r}}, t)$  térfogati töltéssűrűséggel jellemzett töltésrendszer konvektív áramsűrűsége

$$\vec{\mathcal{J}}_{\text{konv}} = \rho \vec{\mathbf{v}}$$

Mivel a szupravezetők kivételével a **konduktív áramokat** a **közegben** fel-lehető **mikroszkopikus töltéshordozókra** az **elektromos mező** által kifejtett **erőhatás hozza létre** (tartja fenn), ezért jó közelítéssel a **konduktív áramsűrűség** arányos az **elektromos térerősséggel** (**általánosított Ohm-törvény**)

$$\vec{\mathcal{J}}_{\text{kond}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$$

ahol  $\sigma$  a **közeg fenomenologikus jellemzője** (anak **vezetőképessége**), amely izotrop esetben skalár, míg anizotrop esetben egy tenzor.

*Megjegyzés:* nagyon erős tereknél a sorfejtés magasabb rendű tagjai is szerepet játszhatnak.

### 7. Töltésmegmaradás

Zárt rendszer elektromos töltése nem változik az idő múlásával.

**Lokális megmaradási törvény:** nemcsak egy zárt rendszer teljes elektromos töltése marad meg az idő folyamán, de bármely részének töltése is csak annyival változhat meg, amekkora töltés áramlik a részrendszer határfelületén.

Töltésmegmaradás matematikai megfogalmazása:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} \vec{\mathcal{J}} = 0$$

kontinuitási egyenlet

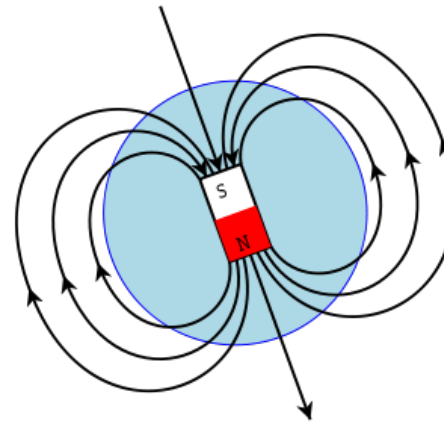
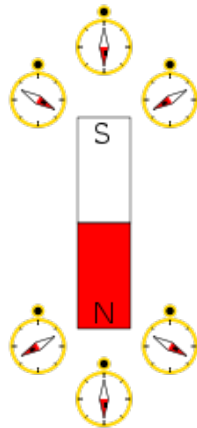
Szimmetria-elv: mértékinvariancia.

### 8. Mágneses indukció és térerősség

Thalész (i.e. 600 körül): mágneses ásványok közötti erőhatások.

Shen Kuo (1088): mágneses testekre ható forgatónyomaték  $\rightsquigarrow$  iránytű.

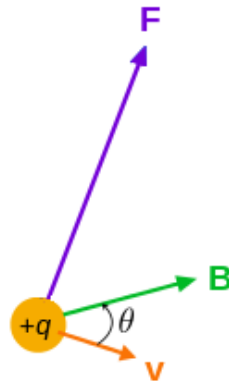
Gilbert (1600): földmágnesesség.



Mágneses mezőben mozgó elektromos töltésekre mozgásuk irányára merőleges, töltésükkel és sebességükkel arányos erő hat (Lorentz-erő)

$$|\vec{F}| = \frac{q|\vec{v}| \sin \theta}{c} B$$

Itt  $q$  a töltés nagysága,  $|\vec{v}|$  a sebessége,  $\theta$  a mozgás irányától függő szög,  $c = 299,792 \text{ km/s}$  a fény vákuumbeli sebessége (határsebesség), míg  $B$  a ponttöltéstől független, a mágneses mezőt jellemző mennyiség.



*Következmény:* a mágneses mező jellemezhető egy  $\vec{\mathbf{B}}$  vektormennyiséggel (mágneses indukció), amelynek nagysága  $B$ , míg iránya merőleges az  $\vec{\mathbf{F}}$  erőre és  $\theta$  szöget zár be a test  $\vec{\mathbf{v}}$  sebességével, vagyis

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{q}{c} \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Oersted (elektromos áram által átjárt vezeték közelébe helyezett mágnesű a vezetékre merőleges irányba áll be) és Biot és Savart (áram által átjárt vezetékek erőhatást fejtenek ki egymásra) megfigyelései alapján az elektromos áramok (mozgó töltések) mágneses mezőt keltenek.

Ampère: molekulákon belüli elektromos áramok (molekuláris áramok) a közegek mágneses tulajdonságainak okozói.

Mivel a mágneses mező befolyásolja a molekuláris áramokat a Lorentz-erő révén, ezért a közeg mágneses tulajdonságai maguk is függenek a külső mágneses mezőtől.

*Következmény:* a mágneses mező hatásainak teljes körű jellemzéséhez szükség van a  $\vec{\mathbf{B}}$  indukcióvektor mellett a közeg (mágneses) állapotát jellemző mennyiségre, a  $\vec{\mathbf{H}}$  mágneses térerősségre (közeg hiányában mért mágneses indukció).

Vákuumban  $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}}$ , egyébként a közegre jellemző  $\vec{\mathbf{B}} = \mathcal{B}(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})$  anyagi összefüggés áll fenn (mikroszkopikus ok: molekuláris áramok és/vagy atomi mágneses momentumok).

## 9. Mozgás homogén mágneses térben

Tekintsünk egy időben állandó  $\vec{\mathbf{B}}$  indukcióvektorú homogén mágneses mezőben mozgó,  $q$  töltésű és  $m$  tömegű pontszerű testet.

**Newton második axiómája** szerint  $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$ , vagyis a mozgásegyenlet

$$m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$\vec{\mathbf{v}}$  merőleges a  $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$  vektoriális szorzatra, ezért

$$\frac{1}{2} \frac{d(m\vec{\mathbf{v}}^2)}{dt} = m\vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0$$

vagyis **a test**  $K = \frac{1}{2}m\vec{\mathbf{v}}^2$  **kinetikus energiája időben állandó**: a mágneses mező nem végez mechanikai munkát a töltéseken!



Mivel a Lorentz-erő merőleges a mágneses indukcióvektorra, ezért

$$\frac{d(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{v}})}{dt} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{q}{mc} (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0$$

vagyis a **sebesség longitudinális komponense** (a  $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$  skalárszorzat) **se változik az idő során** (ha pl. kezdetben  $\vec{\mathbf{v}}$  merőleges  $\vec{\mathbf{B}}$ -re, akkor merőleges marad arra az egész mozgás folyamán).

Olyan Descartes-koordinátákat választva, melyek  $z$ -tengelye párhuzamos  $\vec{\mathbf{B}}$ -vel (azaz  $\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\mathbf{e}}_z$ ), a mozgásegyenlet megoldása

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_{\perp} \cos(\omega t + \delta) \vec{\mathbf{e}}_x + v_{\perp} \sin(\omega t + \delta) \vec{\mathbf{e}}_y + v_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

ahol  $\omega = \frac{qB}{mc}$  a **girációs frekvencia** és  $v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_z^2}$  a transzverzális sebesség.

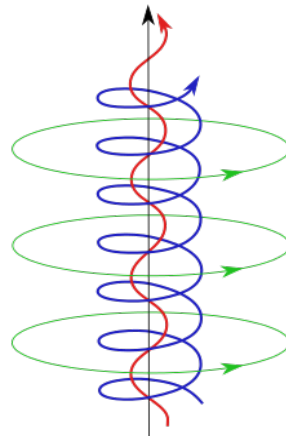
## 9 MOZGÁS HOMOGEN MÁGNESES TÉRBEN

---

$v_z$  állandó sebességű,  $\vec{B}$ -vel párhuzamos irányú (longitudinális) egyenletes haladó mozgás és egy

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi \frac{mc}{|q|B}$$

periódusú transzverzális ( $\vec{B}$ -re merőleges) forgómozgás szuperpozíciója.

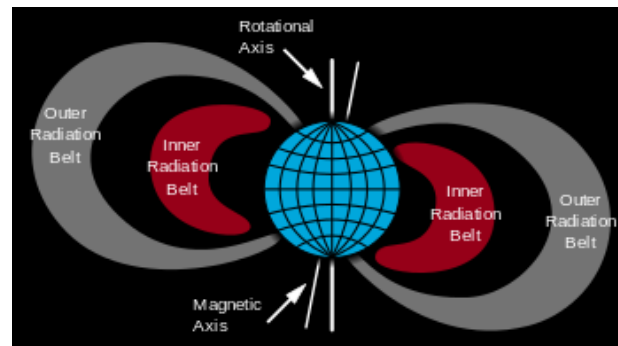


A trajektória egy  $R = \frac{mc}{|q|B} v_{\perp}$  sugarú és  $v_z T$  emelkedésű csavarvonal (hélix), melynek tengelye párhuzamos a mágneses mező irányával.

## 9 MOZGÁS HOMOGEN MÁGNESES TÉRBEN

A  $T$  periódusidő arányos mind  $B$ -vel, mind a  $\frac{q}{m}$  fajlagos töltéssel, de független a  $v$  sebességtől ( $\rightsquigarrow$  tömegspektroszkópia, ciklotron).

Amennyiben a mágneses mező mindenhol azonos irányú, de nagysága lassan növekszik, akkor a csavarmenetek sugara és a köztük lévő távolság csökken, az indukció értékével fordítva arányosan. A Föld mágneses mezeje a külső forrásból (napszél, kozmikus sugárzás) származó nagy energiájú töltött részecskéket a fentihez hasonló mechanizmus segítségével csapdázza a sugárzási övekbe (**van Allen-övek**).



# 10. Mágneses monopólusok

**Tapasztalat:** mágneses testek feldarabolása sosem vezet izolált mágneses töltésekre, nincsenek mágneses monopólusok.

Dirac (1931): mágneses monopólusok létezése nem mond ellent semmilyen alapvető fizikai törvénynek.

Modern részecskefizikai elméletek (nagy egyesítések, **húrelmélet**) mágneses monopólusként viselkedő objektumok létezését jósolják.

Korai Univerzumban keletkezett mágneses **monopólusok ritkaságának magyarázata** kozmológiai modellekben (**inflációs Univerzum**).

**Töltéskvantálás:** minden ismert elemi részecske elektromos töltése az **elemi töltés** (= proton töltése) egyharmadának egész számú többszöröse.

*Megjegyzés:* valójában minden eddig megfigyelt elemi részecske elektromos töltése az elemi töltés egész számú többszöröse, az  $1/3$  és  $2/3$  töltésű **kvarkok** csak kötött állapotban, a **hadronok** (erősen kölcsönható részecskék) összetevőiként fordulnak elő ('**bezárás**').

Dirac: már egyetlen mágneses monopólus létezése az Univerzumban **magyarázná** a töltéskvantálást!

De miért nem észleltek még soha mágneses monopólust?

## 11. Mértékegységek és mértékrendszerek

Mérés: vizsgált mennyiség összehasonlítása viszonyítási alappal.

Mérési folyamat eredménye: numerikus érték + **mértékegység**.

Egyazon fizikai mennyiség esetén **több lehetséges mértékegység**, közöttük egyértelmű konverziós szabállyal: pl.  $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^5 \text{ cm}$ .

Fizikai mennyiség **dimenziója**: egymásba konvertálható mértékegységeinek összessége.

**Homogenitás elve**: csak azonos dimenziójú mennyiségeket lehet összehasonlítani, összeadni vagy kivonni egymásból (megfelelő konverziók után).

*Észrevétel.* Azonos dimenziójú mennyiségek hányadosa **dimenziótlan** (numerikus érték közvetlen jelentéssel bír).

Szorzat dimenziója = dimenziók szorzata (**multiplikatívitás**).

Fizikai törvények & dimenziók multiplikatívítása  $\rightsquigarrow$  **mértékegységek visszavezetése néhány alapegységre** (pl. hossz, tömeg, idő).

**Mértékegységrendszerek:** SI, Gauss-féle (CGS), Heaviside-féle, stb.

Gyakorlati alkalmazásokban általában **SI rendszer** (2019 május 20): alapegyenletek formája egyszerűbb, de anyagi összefüggések bonyolultabbak.

Elméleti megfontolásokhoz **Gauss-féle rendszer:** numerikus faktorok ( $\pi$  és  $c$ ) az alapegyenletekben, de anyagi összefüggések alakja egyszerűbb.

## 12. Tenzori jelleg

Fizikai mennyiségek numerikus jellemzéséhez a mértékegységen (dimenzió) túlmenően szükséges ismerni a vonatkoztatási rendszertől való függést  $\rightsquigarrow$  **tenzori jelleg**: skalár, vektor, tenzor, spinor, stb.

**Skalár**: egyetlen számadattal (+ mértékegység) jellemezhető fizikai mennyiség (pl. tömeg, hosszúság, idő, hőmérséklet, energia, nyomás, ...).

**Vektor**: jellemzéséhez szükséges egy numerikus érték (+ a mértékegység) – a vektormennyiség **nagysága** – és egy irány megadása (pl. sebesség, erő, impulzus, elmozdulás, ...).



**Tenzor:** vektormennyiségek közötti lineáris kapcsolatot jellemző mennyiség, pl. rugalmas feszültség, tehetetlenségi nyomaték, impulzusáram, ...

Gyakran **anizotróp** szituációk, azaz olyan helyzetek leírására szolgálnak, ahol egyes irányok kitüntetett szerepet játszanak (pl. kristályos anyagok tulajdonságai).

**Kovariancia elve:** csak azonos tenzori jellegű mennyiségeket lehet összehasonlítani és összeadni egymással, vagy kivonni őket egymásból.

**Axiálvektorok:** tértükrözés (inverzió) során vektormennyiségek iránya ellentétesre vált, de egyes fizikai mennyiségek (pl. impulzusmomentum, forgatónyomaték, stb.) iránya ilyenkor se változik.