Stacionárius töltésáramlás

1. A kontinuitási egyenlet

Egyenáram: stacionárius (időfüggetlen) konduktív töltésáramlás.

Térjellemzők és $\vec{\mathbf{J}}$ áramsűrűség időben nem változik $\rightsquigarrow$ $\rho = \frac{1}{4\pi}\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}}$ töltéssűrűség időben állandó.

A $\mathcal{V}$ tartomány belsejében található töltés megmarad, ezért $\mathcal{V}$ -ből nem áramlik ki töltés

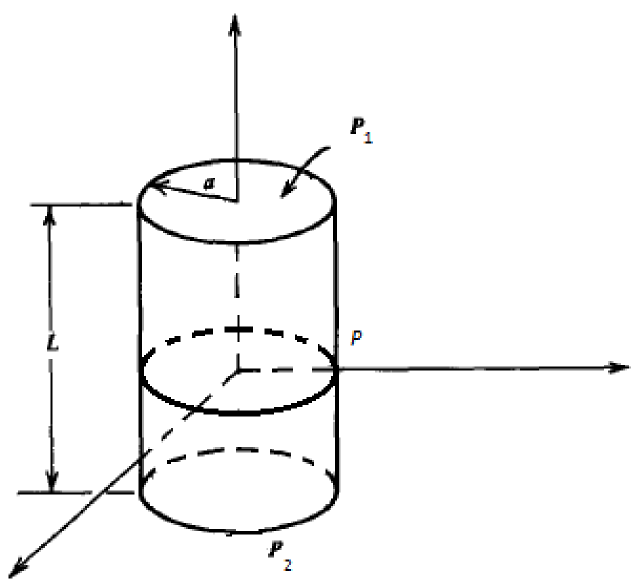
$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{J}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = 0$$

Összehúzva $\mathcal{V}$-t egy pontra kapjuk a

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathfrak{J}} = 0$$

kontinuitási egyenletet.

Vizsgáljuk két különböző közeg határfelületét, melyet egy L magasságú, a határfelületet merőlegesen metsző $\mathcal{V}$ hengeres test oszt két részre.



Mivel $\mathcal{V}$-ből nem áramlik ki töltés, ezért

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathfrak{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = 0$$

Az L magasságot csökkentve (a határfelületre összenyomva a hengert), mind a P_2 fedő- és a P_1 alaplap rásimul P-re, és

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathfrak{J}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \rightarrow \int_{P_2} \vec{\mathfrak{J}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} + \int_{P_1} \vec{\mathfrak{J}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \rightarrow \int_{P} \vec{\mathfrak{J}}_2 \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} - \int_{P} \vec{\mathfrak{J}}_1 \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

mivel a palást járuléka eltűnik: innen

$$\int_{P} \vec{\mathfrak{J}}_2 \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = \int_{P} \vec{\mathfrak{J}}_1 \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

ahol $\vec{\mathfrak{J}}_1$ és $\vec{\mathfrak{J}}_2$ jelöli az áramsűrűséget a határfelület két oldalán.

P-t egy pontra zsugorítva

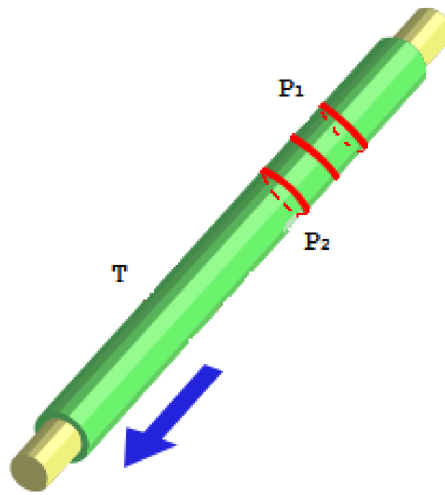
$$\vec{\mathbf{J}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{J}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

ahol $\vec{\mathbf{n}}$ a határfelület normális egységvektorát jelöli.

Két közeg határfelületén az áramsűrűség normális komponense folytonosan változik, míg tangenciális komponense ugrást szenvedhet.

Vezető-szigetelő határfelületen (mivel nincs töltésáramlás a szigetelőben, így ott az áramsűrűség normális komponense eltűnik) a konduktív áramsűrűség mindig tangenciális.

Tekintsünk egy szigetelőbe ágyazott vezető csövet. Mivel stacionárius áramlás során bármely két keresztmetszet közti csődarab belsejében található teljes töltés nem változhat, ezért az egyikenen beáramló töltés mennyisége meg kell egyezzen a másikonn kiáramlóval.



Egy vezető csőben bármely kereszten egységnyi idő alatt átáramló töltés mennyisége ('áramerősség') mindig ugyanakkora.

2. A Joule–hő

Konduktív töltésáramlás disszipatív folyamat: lokális inhomogenitásokon történő szórási folyamatok révén a mikroszkopikus töltéshordozók kinetikus energiája hővé alakul át (Joule-hő), melynek forrása az elektromos mező által a mikroszkopikus töltéshordozókon végzett munka.

Tekintsünk egy $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ térfogati töltéssűrűséggel jellemzett folytonos töltéseloszlást, amely vákuumban mozog $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$ sebességgel. Az elektromos mező által az $\vec{\mathbf{r}}$ körüli egységnyi térfogatban található töltésekre kifejtett erő $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})=\rho(\vec{\mathbf{r}})\,\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$, így a Δt időtartam alatt rajtuk végzett munka

$$\mathcal{W} = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} = \rho\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,\Delta t = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathfrak{J}}_{\mathtt{konv}}\,\Delta t$$

mivel a térfogat elmozdulása ez alatt $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})\,\Delta t$, ahol $\vec{\mathfrak{J}}_{\mathtt{konv}} = \rho\vec{\mathbf{v}}$ a konvektív áramsűrűség.

Elektromos mező nem tesz különbséget konduktív és konvektív töltés-áramlás között, így általában az egységnyi idő alatt egységnyi térfogaton végzett munka $\vec{\mathfrak{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}$, és tisztán konduktív áramok esetén ez a hőtermelés forrása.

Joule-törvény: konduktív töltésáramlás által egységnyi idő alatt egységnyi térfogatban termelt hő mennyisége

$$\boxed{\mathcal{W} = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathfrak{J}}_{\mathtt{kond}}}$$

3. Elektromotoros erő

Mivel a konduktív töltésáramlás disszipatív folyamat, ezért stacionárius áramlás fenntartásához szükség van áramforrásra, amely kompenzálni képes a hőtermelés okozta energia veszteséget egy lokalizált elektromos mező által felgyorsítva a mikroszkopikus töltéshordozókat.

Az elektromos mező térerőssége felbontható

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathtt{tot}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{E}}'(\vec{\mathbf{r}})$$

alakban, ahol $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ a térerősség az áramforráson kívül, míg $\vec{\mathbf{E}}'(\vec{\mathbf{r}})$ az áramforráson belüli (lokalizált) térerősség.

$\vec{\mathbf{E}}'(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggése általában igen bonyolult, de a részletek érdektelenek.

Áramforrás jellemezhető az

$$\mathcal{E} = \int \vec{\mathbf{E}}'(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

elektromotoros ereje révén (egységnyi töltésnek átadott energia).

Áramforrások típusai:

1. Kémiai (galvánelemek, akkumulátorok): kicsiny elektromotoros erő.
2. Optikai (napelemek): nagyon kicsiny elektromotoros erő, csak megfelelő fényintenzitás (pl. erős napfény) esetén működik.
3. Mechanikai (erőművek): nagy elektromotoros erő, de igen alacsony hatékonyság (jelentős energiaveszteség).
4. Termikus, radioaktív, MHD, stb.

4. Stacionárius áramok elektromos mezeje

Elektromos mező okozta konduktív töltésáramlás $\rightsquigarrow$ nem túl nagy térerősségek esetén általánosított Ohm-törvény ('lineáris válasz')

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathtt{kond}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}_{\mathtt{tot}} = \sigma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}}')$$

ahol σ a közeg vezetőképessége.

Az áramforráson kívüli mező örvénymentes, $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$, míg az áramforrás belsejére lokalizált $\vec{\mathbf{E}}'$ mező kompenzálja a hőtermelés során disszipált energiát.

$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}=\vec{\mathbf{0}}$ következtében létezik $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ potenciál-függvény, amellyel

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{grad}\,\Phi$$

Mivel nincsenek konvektív áramok, ezért a $\mathbf{div}\,\vec{\mathfrak{J}}=0$ kontinuitási egyenlet és az általánosított Ohm-törvény következtében

$$\mathbf{div}\left(\sigma\mathbf{grad}\,\Phi\right) = \mathbf{div}\left(\sigma\vec{\mathbf{E}}'\right)$$

Potenciál meghatározása általában rendkívül bonyolult.

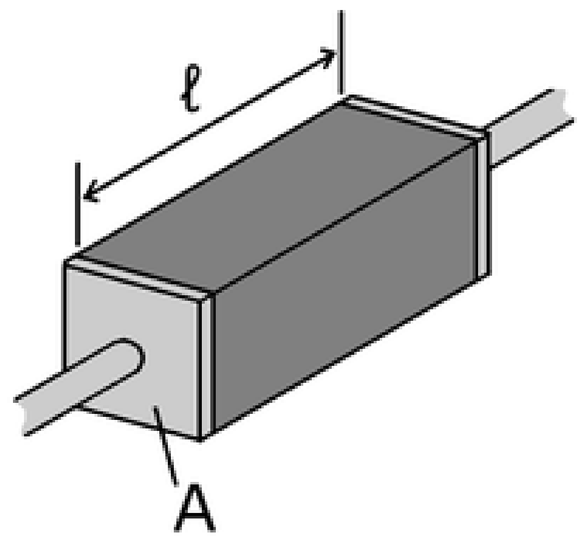
Drótvezető: szigetelő közegbe ágyazott vezető cső, melynek átmérője elhanyagolható a hosszához képest.

Számítás jelentősen leegyszerűsödik elektromos hálózatokra (drótvezetők által összekötött áramforrások rendszerére), mivel

- az áramforrások teljes mértékben jellemezhetők elektromotoros erejükkel, az áramforrás belső szerkezete irreleváns;
- a töltésáramlás lokalizálódik az áramforrásokat összekötő drótvezetőkre, és jól jellemezhető a (keresztmetszet-független) áramerősséggel, a konduktív áramsűrűség pontos helyfüggése érdektelen.

5. Az Ohm–törvény

Tekintsünk egy ℓ hosszúságú és A keresztmetszetű homogén, egyenes drótvezetőt, amelyen I erősségű stacionárius áram folyik át.



Legyen az x-tengely a drótvezetővel párhuzamos (töltésáramlás iránya).

Tegyük fel, hogy az x-tengelyre merőleges irányokban az áram egyenletes eloszlású, azaz

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathtt{kond}} = \frac{I}{A}\vec{\mathbf{e}}_x$$

a drótvezető belsejében.

Az általánosított Ohm-törvény alapján a stacionárius konduktív áramot

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sigma}\vec{\mathbf{J}}_{\mathtt{kond}} = \frac{I}{\sigma A}\vec{\mathbf{e}}_x$$

elektromos mező tartja fenn a drótvezető belsejében, amely a

$$\Phi(x) = \Phi_0 - \frac{I}{\sigma A}x$$

lineáris potenciál-függvénynek felel meg.

Innen a potenciálkülönbség ('feszültség') a drótvezető két vége között

$$U = \Phi(0) - \Phi(\ell) = \frac{I\ell}{\sigma A} = RI$$

ahol

$$R = \frac{\ell}{\sigma A}$$

a drótvezető elektromos ellenállása, amely csak a drótvezető anyagi összetételétől és mértani alakjától függ, de független az áram erősségétől.

$$\boxed{\text{A feszültség arányos az áramerősséggel!}}$$

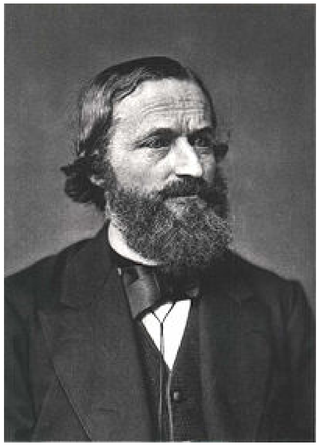
Az egységnyi idő alatt termelt Joule-hő

$$\mathcal{W} = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\mathtt{kond}}\, \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \left(\frac{I}{\sigma A}\vec{\mathbf{e}}_x\right) \cdot \left(\frac{I}{A}\vec{\mathbf{e}}_x\right) A\ell = \frac{I^2\ell}{\sigma A} = I^2 R = IU$$

6. Kirchhoff törvényei

Elektromos hálózat: drótvezetőkkel összekötött áramforrások rendszere.

Elektromos hálózat jellemzése áramforrások $\mathcal{E}_i$ elektromotoros ereje és a drótvezetők R_i elektromos ellenállása segítségével.



G. Kirchhoff (1845): az egyes drótvezetőkön átfolyó I_i áramerősségek meghatározása visszavezethető egy lineáris egyenletrendszer megoldására.

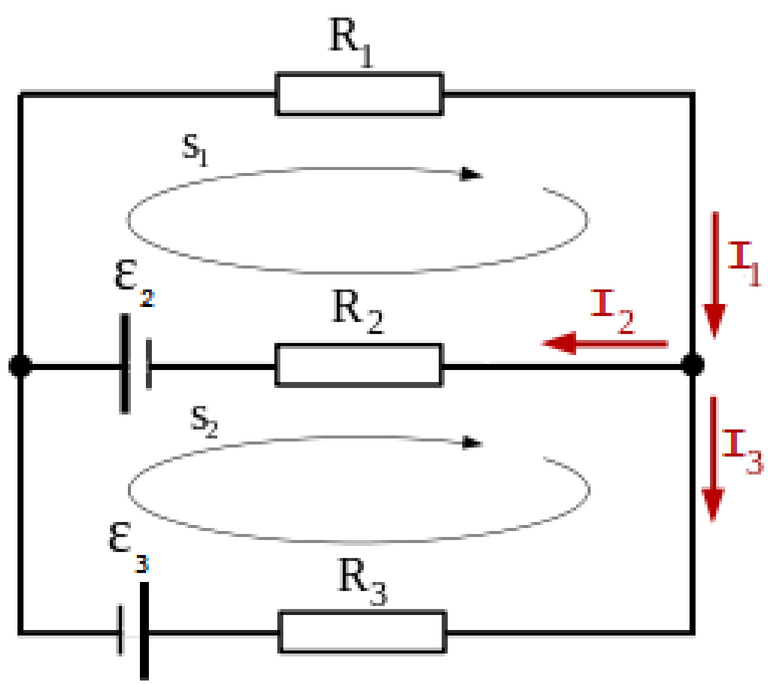
Kirchhoff első törvénye (csomóponti szabály): egy elektromos hálózat bármely csomópontjába (drótvezetők találkozása) befolyó áramerősségek összege megegyezik ugyanezen csomópontból kifolyó áramerősségek összegével.

Kirchhoff második törvénye (hurok-szabály): egy elektromos hálózat bármely zárt hurkában előforduló áramforrások elektromotoros erejének összege megegyezik a hurokban előforduló egyes drótvezetők ellenállásának és a rajtuk átfolyó áram erőssége szorzatának az összegével.

csomóponti szabály $\leftrightsquigarrow$ töltésmegmaradás

hurok szabály $\leftrightsquigarrow$ energiamegmaradás

Fenti összefüggések lineáris egyenletrendszert adnak az áramerősségek meghatározására, melynek alakját a drótvezetők R_i ellenállása és az áramforrások $\mathcal{E}_i$ elektromotoros ereje mellett a hálózat topológiája határozza meg $\rightsquigarrow$ gráfelméleti módszerek alkalmazása az elektromos hálózatok vizsgálatában.



Csomóponti szabály: $I_1 = I_2 + I_3$.

Hurok szabály első hurokra: $\mathcal{E}_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2$.

Hurok szabály második hurokra: $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = R_2 I_2 - R_3 I_3$.

Észrevétel. a harmadik (1-es és 3-as drótvezetőből alkotott) hurok, illetve a másik csomópont (az ábra bal oldalán) figyelembe vétele nem szükséges.

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{pmatrix} (R_2 + R_3)\mathcal{E}_2 - R_2 \mathcal{E}_3 \\ R_3 \mathcal{E}_2 + R_1 \mathcal{E}_3 \\ R_2 \mathcal{E}_2 - (R_1 + R_2)\mathcal{E}_3 \end{pmatrix}$$

7. Vezetési mechanizmusok

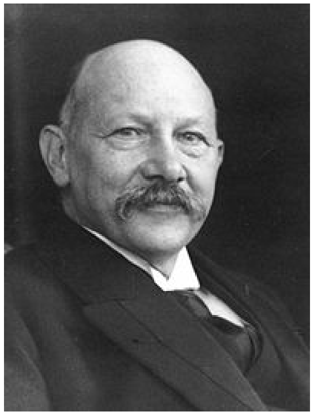
Különféle eredetű és jellegű mikroszkopikus töltéshordozók az anyag halmazállapotától és a külső körülményektől függően:

- szupravezetőknél Cooper–párok;
- elektrolitokban anionok és kationok;
- fémekben delokalizált elektronok;
- félvezetőkben elektronok és lyukak.

Sok esetben a vezetés klasszikusan modellezhető mikroszkopikus töltéshordozókból álló ideális gáz (ill. folyadék) segítségével.

Szupravezetők

Kamerling Onnes (1911): a hőmérséklet csökkenésével több anyag fajlagos elektromos ellenállása eltűnik (szupravezetővé válik) egy kritikus hőmérséklet alatt.

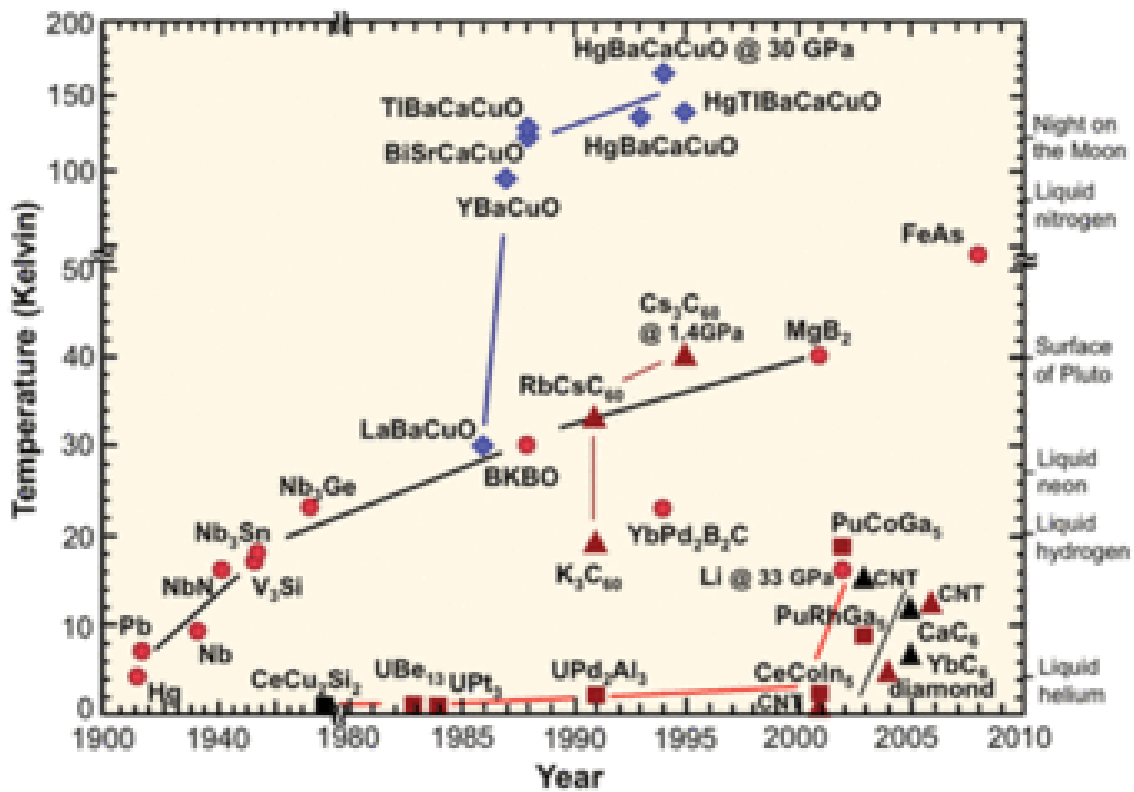


Meissner és Ochsenfeld (1933): szupravezetők kiszorítják belsejükből a mágneses mezőt (ideális diamágnesek).

Bardeen, Cooper és Schrieffer (1957): mikroszkopikus magyarázat.

Abrikosov (1956): szupravezetők típusai.

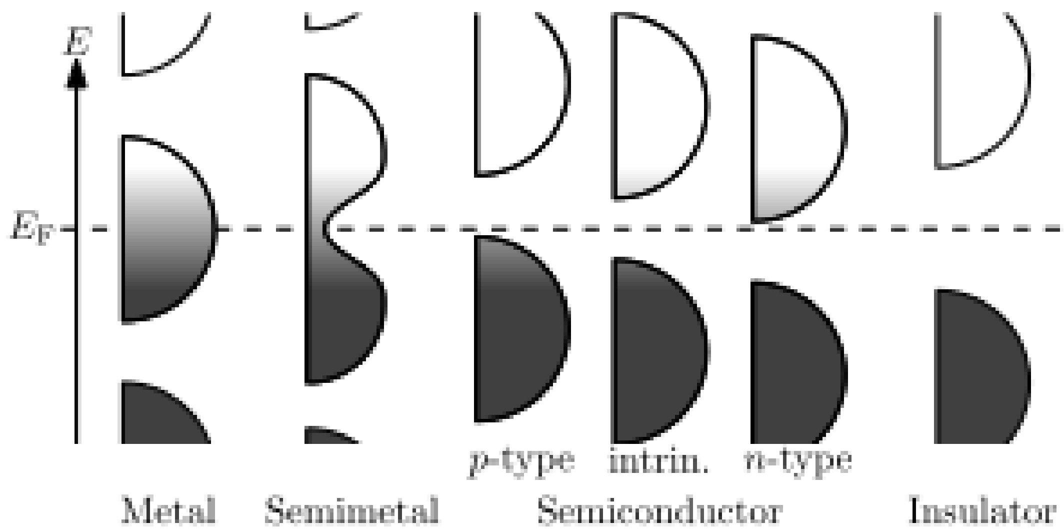
Bednorz és Müller (1986): magas hőmérsékletű szupravezetés.



Kristályos anyagok

Fémes kristályokban az elektronok egy része delokalizált, a kristály egészéhez kötődik, és nem az egyes atomokhoz/molekulákhoz ⇝ kvázi-szabadon mozognak külső elektromos mezőben.

Magyarázat: energiaszintek sávszerkezete makroszkopikus kristályokban.



Az E_F Fermi-energia alatt minden energiaszint telített elektronokkal (alapállapotban) $\rightsquigarrow$ ha a Fermi-energia két sáv közé esik, akkor a kristály szigetelő, mert túl nagy energiaátadás szükséges az elektronok mozgatásához, ellenben ha a Fermi-energia egy sáv belsejében található, akkor a kristály jó vezető, mert már igen csekély energia elegendő az elektronokat mozgásba hozni.

Fémes kötés: elektrosztatikus vonzás a pozitív ionok alkotta kristályrács és a delokalizált elektronok között.

Fémekben a hővezetést is többnyire a vezetési elektronok okozzák, ezért kapcsolat van az elektromos és hővezetési képességek között.

Folyadékok

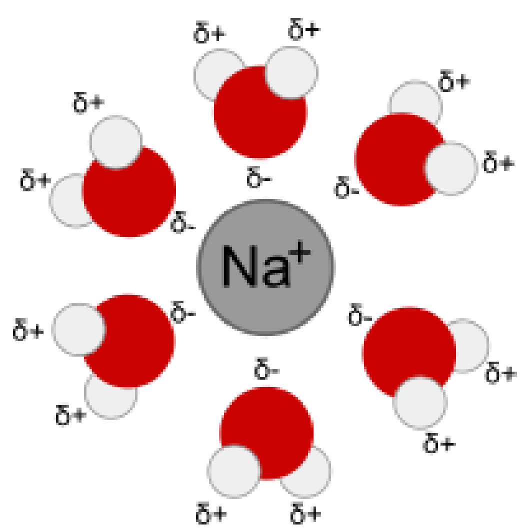
Folyékony anyagok csak akkor vezetik az áramot, ha elég nagy koncentrációban tartalmaznak ionokat (elektromosan töltött atomokat/molekulákat).

Rekombináció: olyan mikroszkopikus folyamat, melynek során az ellentétes töltésű ionok kölcsönösen semlegesítik egymást.

A megfelelő ionkoncentráció fenntartása miatt szükség van a rekombinációval dinamikus egyensúlyban lévő ionizációs mechanizmusra.

Ionkristályok olvadékaiban ilyen a hőmozgás, melynek következtében az ionok elhagyják a rácsban elfoglalt helyüket.

Elektrolitokban (ionkristályok oldatai poláros oldószerekben, pl. `NaCl` vizes oldata) a releváns ionizációs mechanizmus az elektrolitikus disszociáció: a poláros oldószer molekulái aggregálódnak az ionokkal, ezáltal szeparálva őket és leárnyékolva elektromos töltésüket, így csökkentve a köztük fellépő elektrosztatikus kölcsönhatást és a rekombinációra való hajlamot.



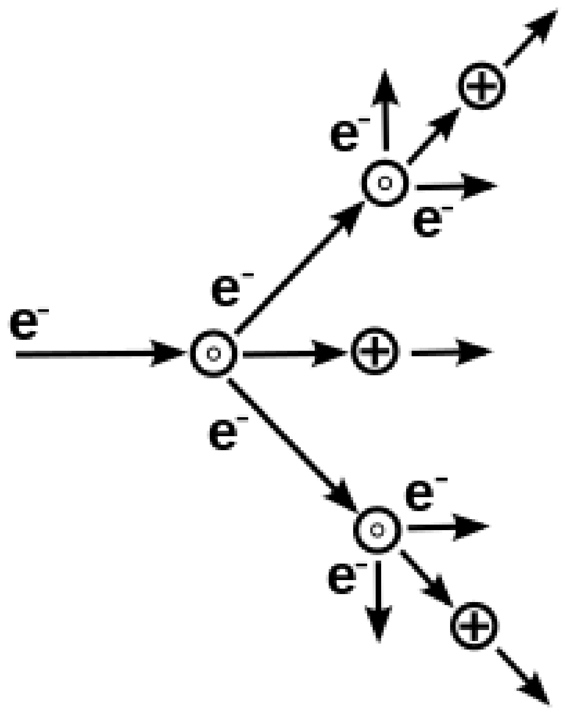
Gázok és plazmák

Folyadékokhoz hasonlóan a gázok általában szigetelők, kivéve ha elég nagy a mozgékony ionok koncentrációja (ionok rekombinációját valamely ionizációs mechanizmus kompenzálja).

Ionizációs mechanizmusok gázokban:

1. hőmozgásból származó ütközések magas hőmérsékleten;
2. nagy energiájú sugárzások (radioaktív, röntgen, kozmikus) hatása;
3. elektromos mező által felgyorsított ionok ütközése a gázt határoló fallal (felületi ionizáció), illetve a gázt alkotó semleges atomokkal és/vagy molekulákkal (térfogati ionizáció).

Utóbbi esetben előfordulhat, hogy az ütközések során az elektronok száma megsokszorozódik (Townsend–kaszkád), így a kezdeti ionizációt létrehozó hatás megszűnte után is makroszkopikus mennyiségű ion marad a gázban $\rightsquigarrow$ önfenntartó gázkisülés.



Plazma: olyan erősen ionizált, kvázi-semleges gáz, melyben az ionok koncentrációja meghaladja az elektromos árnyékolást jellemző Debye-korlátot (mozgékony mikroszkopikus töltéshordozók nagy száma miatt a plazma jó vezető).

Az Univerzumban a ’látható anyag’ jelentős része (a Nap, a csillagok és csillagködök, a Föld magja és ionoszférája, az elektromos ívek, a villámcsatornák, stb.) plazma: ’negyedik halmazállapot’.