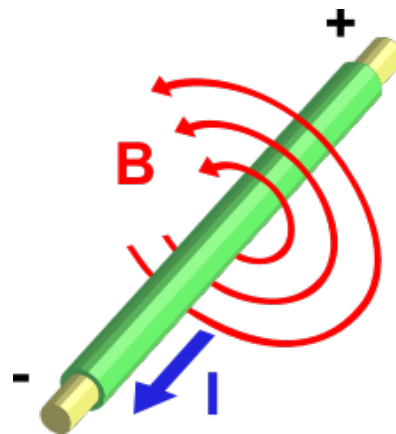


# Mágneses jelenségek

## 1 Stacionárius áramok mágneses mezeje

Oersted (1820): áramvezető drót közelébe helyezett mágnesű a töltésáramlás irányára merőleges irányba fordul, vagyis a **mozgó elektromos töltések mágneses hatás forrásai**.



**Biot-Savart-törvény** (1820): egy  $\mathcal{L}$  görbe mentén elhelyezkedő drótvezetőben folyó  $I$  erősségű stacionárius áram által generált mágneses mező indukcióvektora (vákumban)

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{I}{c} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\vec{\mathbf{R}} - \vec{\mathbf{r}}) \times d\vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

*Megjegyzés:* az integrál csak a drótvezető geometriájától függ!

$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}})$  áramsűrűség-vektorú, folytonos, stacionárius árameloszlást áramlási csatornák összességként szemlélve, a szuperpozíció elvének folyományaként

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

Az **integrálkifejezés forrásmentes**, azaz divergenciája zérus

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0}$$

Innen a Gauss-tétel révén adódik tetszőleges  $\mathcal{V}$  térfogatra a

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} d^3\vec{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{mágneses Gauss-törvény}$$

*Következmény:* **nincsenek mágneses monopólusok** (izolált mágneses töltések)!

*Megjegyzés:* az indukcióvektor forrásmentessége, azaz  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$  miatt

létezik olyan  $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$  vektormező (**vektorpotenciál**) amelyre

$$\vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}$$

Az indukcióvektorra vonatkozó integrálkifejezés rotációja

$$\mathbf{rot} \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}}$$

ahonnan Stokes tételének felhasználásával bármely  $\mathcal{S}$  felületre

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

A fenti összefüggés csak vákuumban, illetve nem-mágnesezhető közegekben érvényes: mágnesezhető anyagban az áramsűrűséghez hozzáadódik egy (molekuláris töltésáramokból és/vagy párosítatlan spinekből eredő)

$\vec{\mathbf{J}}_m$  járulék, így az összefüggés helyes alakja

$$\mathbf{rot} \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}} + \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}}_m$$

A  $\vec{\mathcal{J}}_m(\vec{r})$  molekuláris járulék divergenciamentes,  $\text{div } \vec{\mathcal{J}}_m = 0$ , ezért létezik olyan  $\vec{\mathbf{M}}(\vec{r})$  vektormező (mágnesezettség), hogy  $\vec{\mathcal{J}}_m = c \text{rot } \vec{\mathbf{M}}$ .

Bevezetve a  $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}} - 4\pi\vec{\mathbf{M}}$  jelölést, végül

$$\text{rot } \vec{\mathbf{H}} = \text{rot } \vec{\mathbf{B}} - 4\pi \text{rot } \vec{\mathbf{M}} = \text{rot } \vec{\mathbf{B}} - \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}}_m = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}}$$

Egy  $\mathcal{S}$  felületre integrálva, és felhasználva a Stokes-tételt adódik

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{Ampère-törvény}$$

ahol  $I = \int_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$  az  $\mathcal{S}$  felületen egységnyi idő alatt áthaladó töltés.

Közeg hiányában  $\vec{\mathcal{J}}_m = \vec{0}$  és ezért  $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}$ , így  $\vec{\mathbf{H}}$  a mágneses térerősség (az árameloszlás által keltett mágneses mező indukcióvektora vákuumban).

## 2 A permeabilitás

**Permanens mágnes**: olyan test, amely külső **mágneses mező hiányában is nemzérus** ('**spontán**') **mágnesezettséget** mutat, azaz  $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}$  esetén  $\vec{\mathbf{M}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ .

Csak speciális (**ferro-** és **ferrimágneses**) anyagokban fordul elő.

Spontán mágnesezettség hiányában, nem túl nagy térerősségeknél a

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_m \vec{\mathbf{H}}$$

**lineáris összefüggés** jó közelítés. Itt  $\chi_m$  a közeg **mágneses szuszceptibilitása**, amely izotrop esetben skalár, egyébként tenzor.

## 2 A PERMEABILITÁS

---

A  $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}} + 4\pi\vec{\mathbf{M}}$  összefüggés miatt lineáris közelítésben

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}}$$

ahol  $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$  a közeg **mágneses permeabilitása**.

Az elektromos szuszceptibilitással ellentétben a  $\chi_m$  **mágneses szuszceptibilitás** lehet **negatív** is (**diamágneses anyagok**), de (energetikai okokból) a  $\mu$  **mágneses permeabilitás soha**, azaz  $\mu \geq 0$ , és ezért  $\chi_m \geq -\frac{1}{4\pi}$ .

**Paramágneses anyag**: kicsiny pozitív szuszceptibilitás.

Ferro- és ferrimágneses anyagok: spontán mágnesezettség ( $\chi_m$  szuszceptibilitás az  $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{H}})$  nem-lineáris **mágnesezettségi görbe** meredeksége az origóban).

Table 1: Néhány anyag mágneses szuszceptibilitása.

	anyag	$\chi_m$ szuszceptibilitás
diamágneses	nátrium	$-2.4 \times 10^{-6}$
	réz	$-1.0 \times 10^{-5}$
	gyémánt	$-2.2 \times 10^{-5}$
	higany	$-3.2 \times 10^{-5}$
	víz	$-0.9 \times 10^{-5}$
paramágneses	levegő	$3.6 \times 10^{-7}$
	oxigén	$2.1 \times 10^{-6}$
	magnézium	$1.2 \times 10^{-5}$
	alumínium	$2.2 \times 10^{-5}$
ferromágneses	vas	$5 \times 10^3 - 1.5 \times 10^6$
	Si-Fe kristályok	$3.8 \times 10^6$
ferrimágneses	magnezit ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )	$10^2$



### 3 A vektorpotenciál

Az indukcióvektor forrásmentessége, azaz  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$  miatt létezik olyan  $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$  vektormező (vektorpotenciál) amelyre

$$\vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}$$

Az  $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$  vektorpotenciál nem egyértelmű, mivel bármely  $\chi(\vec{\mathbf{r}})$  skalármező gradiense örvénymentes, ezért  $\vec{\mathbf{A}}$  és  $\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \operatorname{grad} \chi$  ugyanazt a mágneses mezőt írja le (mértékinvariancia).

*Megjegyzés:* mindig választható olyan vektorpotenciál, amely forrásmentes

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0$$

Coulomb-mérték

### 3 A VEKTORPOTENCIÁL

---

$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$  lineáris anyagi összefüggéssel leírható homogén, izotrop közegben

$$\Delta \vec{\mathbf{A}} = \text{grad div } \vec{\mathbf{A}} - \text{rot rot } \vec{\mathbf{A}} = -\text{rot}(\mu \vec{\mathbf{H}}) = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{\mathcal{J}}$$

vektoriális Poisson-egyenlet adódik a vektorpotenciálra (Ampère-törvényből), melynek egy partikuláris megoldása

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

ahonnan a mágneses térerősség

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

a Biot-Savart-törvénynek megfelelően.

## 4 Lokalizált árameloszlások

Tekintsünk egy véges  $\mathcal{V}$  térbeli tartományba **lokalizált árameloszlást**, amelynek  $\vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathbf{r}})$  áramsűrűsége eltűnik  $\mathcal{V}$ -n kívül. A  $\mathcal{V}$  tartománytól távol (vákuumban) a vektorpotenciál

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

képletébe behelyettesítve a

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}|} + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \frac{\{3(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^2 - \vec{\mathbf{r}}^2 \vec{\mathbf{R}}^2\}}{2|\vec{\mathbf{r}}|^5} + \dots$$

sorfejtést azt kapjuk, hogy

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{c|\vec{\mathbf{r}}|} \int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \, d^3\vec{\mathbf{R}} + \frac{1}{c|\vec{\mathbf{r}}|^3} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \, d^3\vec{\mathbf{R}} + \dots$$

Figyelembe véve, hogy az áramsűrűség eltűnik a térrész  $\partial\mathcal{V}$  határán,

továbbá felhasználva a divergencia-tételt és az áramsűrűség forrásmentességét,

adódik

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \, d^3\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

és

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \, d^3\vec{\mathbf{R}} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \{ \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{R}}) \} \, d^3\vec{\mathbf{R}} \right\} \times \vec{\mathbf{r}}$$

Végeredményben azt kapjuk, hogy elég nagy távolságban

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \dots$$

ahol

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}} \{ \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{R}}) \} d^3 \vec{\mathbf{R}}$$

az árameloszlás **mágneses momentuma**. Innen a mágneses térerősség

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \frac{3(\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r}} - |\vec{\mathbf{r}}|^2 \vec{\mathbf{m}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^5}$$

Elektrosztatikai analógia alapján ez egy **mágneses dipólmezőt** ír le (a magasabb rendű mágneses multipólus tagok általában elhanyagolhatók, speciális esetektől eltekintve).

# 5 Anyagok mágneses tulajdonságai

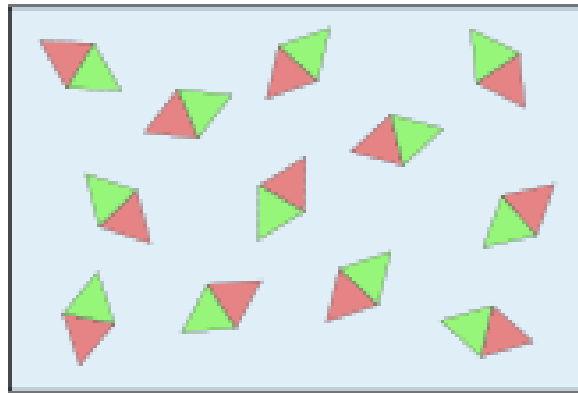
Anyagok mágneses tulajdonságainak magyarázatára csak a kvantumelméleti tárgyalásmód képes, mert

- az anyag mikroszkopikus összetevői – elektronok, atommagok, stb. – kvantumozott eredetű belső impulzusmomentummal (**spin**), és ehhez kapcsolódó mágneses momentummal rendelkeznek (a mozgásukból származó momentumon túlmenően);
- a mikroszkopikus összetevők mágneses momentumai **kvantáltak**, azaz bármely adott irányra vett vetületük csak jól meghatározott diszkrét értékeket vehet fel.

## 5 ANYAGOK MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

---

A mikroszkopikus összetevők mágneses momentumai általában kioltják egymást véletlenszerű irányeloszlásuk miatt, ezért **makroszkopikus testek mágneses momentumsűrűsége általában eltűnik**, kivéve, ha a bennük található mikroszkopikus momentumok iránya valamilyen okból rendezett.



Rendezettség oka lehet egy külső mágneses mező, vagy pedig a mágneses momentumok közti (kvantumos eredetű) **kicserélődési kölcsönhatás**.

Mágneses tulajdonságok kvalitatív tárgyalása lehetséges klasszikus fizikai alapokon (a dielektromos polarizáció analógiájára), de pontos kvantitatív eredmények csak kvantumelméleti számításokból származtathatók.

Makroszkopikus jellemző az  $\vec{M}$  **mágnesezettség**, amely az **egységnyi térfogatban található mágneses momentumok eredője** (momentum-sűrűség).

A mágnesezettség azáltal változhat, hogy a mágneses mező az elektronfelhő deformálásával mikroszkopikus momentumokat indukál és/vagy forogatónyomatékokot fejt ki a már meglévő mikroszkopikus momentumokra, miáltal a momentumok statisztikus irányeloszlása úgy változik meg, hogy azok átlagban a külső mező irányába mutassanak.



### 5.1 Diamágneses anyagok

Külső mágneses mező befolyásolja a molekulák elektronfelhőjének mozgás-állapotát, változást okozva a molekuláris árameloszlásban és a spinekben, és így a molekulák mágneses momentumában is.

Mivel az indukált momentumok jó közelítéssel arányosak a külső mezővel, de azzal ellentétes irányba mutatnak (**Lenz-törvény**), ezért

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

lineáris összefüggés áll fenn negatív  $\chi_m$  mágneses szuszceptibilitással.

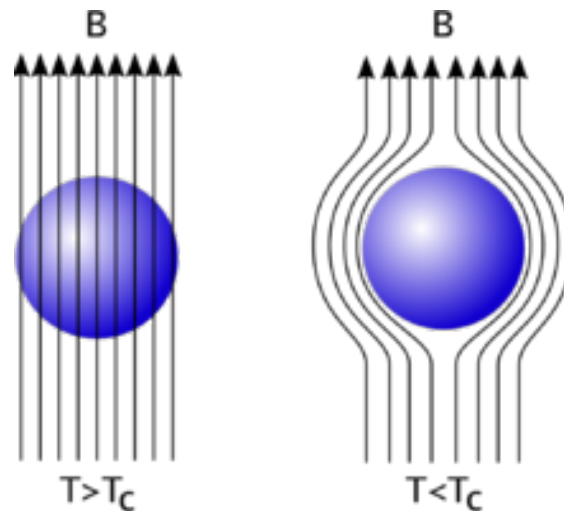
Diamágnesek szuszceptibilitása (általában) független a hőmérséklettől.

## 5 ANYAGOK MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

---

Diamágneses hatás mindig jelen van, de általában elhanyagolható a többi mechanizmushoz képest, kivéve, ha a mikroszkopikus összetevők mágneses momentumai eltűnnek.

A szupravezetők tökéletes diamágnesek, vagyis a mágneses mező kiszorul egy szupravezető test belsejéből – egy vékony felületi réteg kivételével – nem túl erős terek esetén (**Meissner-effektus**).

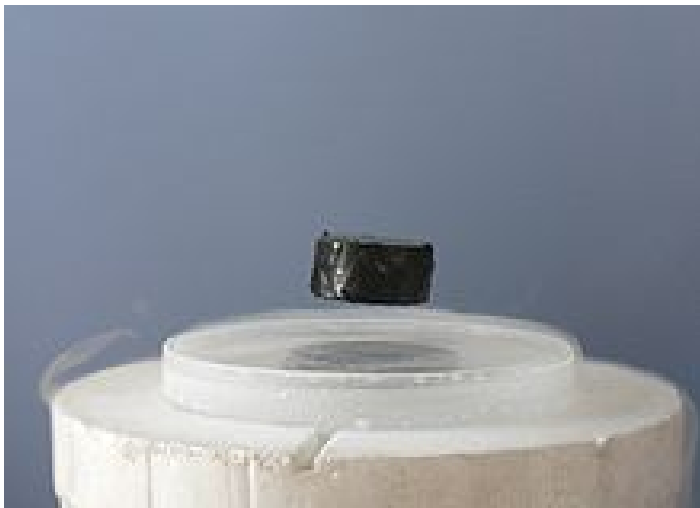


## 5 ANYAGOK MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

---

**II-es típusú szupravezetők:** bizonyos kritikus mágneses térerősség felett a mágneses mező részben behatol a szupravezetőbe, mágneses fluxuscsövekbe lokalizálva (**Abrikosov-vonalak**).

Diamágneseket taszítja a mágneses mező, így elég erős permanens mágnes fölé helyezve lebegnek (**mágneses levitáció**, működik élőlényekre is).



## 5.2 Paramágneses anyagok

Kicserélődési kölcsönhatás hiányában, a párosítatlan spinekből és/vagy molekuláris áramokból származó mikroszkopikus **mágneses momentumok statisztikus irányeloszlása** külső mágneses mező jelenlétében megváltozik (**orientációs mágnesezettség**), mivel a **mikroszkopikus momentumok** igyekeznek a **mező irányával párhuzamosan beállni** (**paramágnesség**).

Nem túl erős mágneses mezők esetén

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

lineáris összefüggés pozitív  $\chi_m > 0$  mágneses szuszeptibilitással.

A termikus fluktuációk hatására a momentumok irányeloszlása egyre rendezetlenebb, ezért **növekvő hőmérséklettel csökken a szuszeptibilitás.**

$T_C$  kritikus hőmérsékletnél (**Curie-hőmérséklet**) **másodrendű fázisátalakulás** egy **rendezett fázisba**,  $T_C$  felett pedig

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad \text{Curie-Weiss-törvény}$$

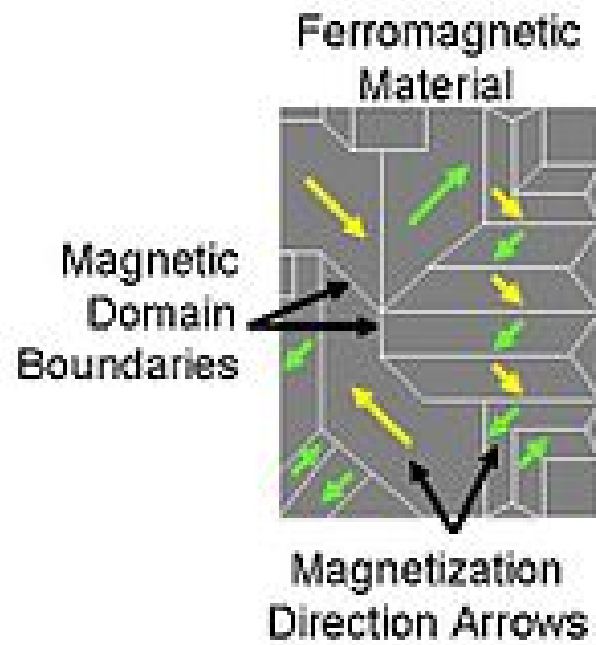
ahol  $C$  egy anyagi jellemző.

*Megjegyzés:* fémes kristályokban a delokalizált elektronok hőmérséklettől független paramágneses járulékot adnak a szuszeptibilitásba (**Pauli-paramágnesség**).

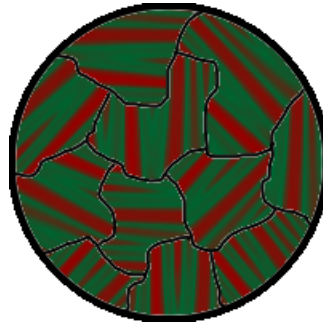
**Paramágneses anyagokat** – a diamágnesekkel ellentétben – **vonzza a mágneses mező** (gyenge effektus).

### 5.3 Ferro- és ferrimágneses anyagok

A mikroszkopikus momentumok közötti erős, kvantumos eredetű **kicszerélődési kölcsönhatás** következtében **makroszkopikus domének** kialakulása **rendezett momentumokkal** alacsony hőmérsékleten.



Egy doménen belül az összes momentum párhuzamos, ezért minden egyes domén egy kicsiny permanens mágnes, de általában a **különböző domének momentumai véletlenszerű irányúak** a termikus fluktuációk következtében.

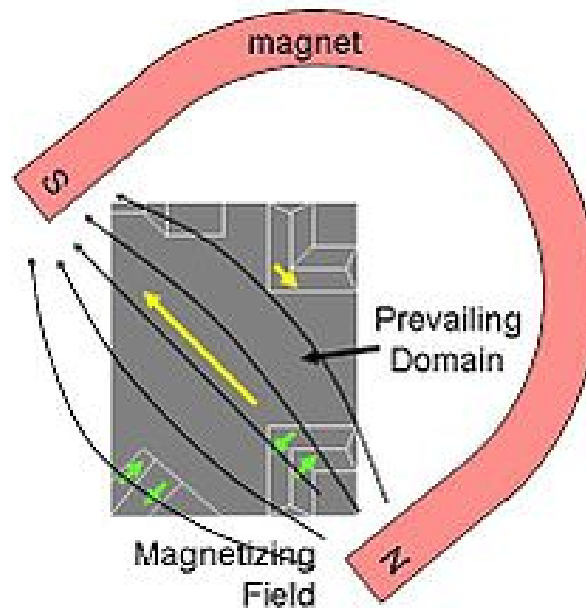


Domének határán a mikroszkopikus momentumok kölcsönhatnak mindkét doménbéli momentumokkal, ezért irányuk megváltozhat, vagyis egyik doménből átkerülhetnek a másikba, minek következtében a domének tágulnak és összemennek, vagyis a **doménfalak mozognak**.

## 5 ANYAGOK MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

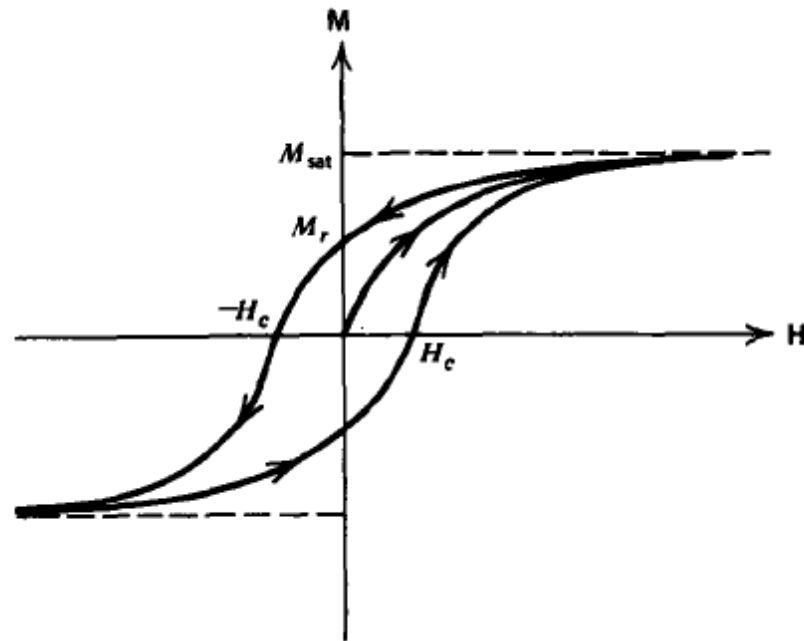
---

Külső mágneses mező nem tudja (energetikai okokból) elfordítani az egyes domének momentumát, de segíti azon domének növekedését, melyek momentumai közel párhuzamosak a külső mezővel, ami elvezet nettó makroszkopikus mágnesezettség kialakulásához.





Doménfalak mozgása **disszipatív** folyamat, minek következtében a **mágneszettségi görbe nemlineáris**.



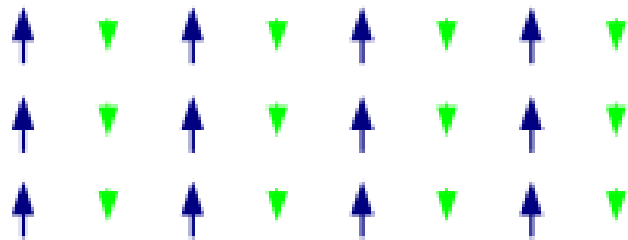
**Hiszterézis:** mágneszettség nem egyértelmű függvénye a térerősségnek, függ a közeg előéletétől is (**memória-effektus**).

## 5 ANYAGOK MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

---

Mágneszettség telítődik ( $M_{sat}$  maximális értéknél) amikor az összes momentum egy irányba mutat (már csak egy domén marad).

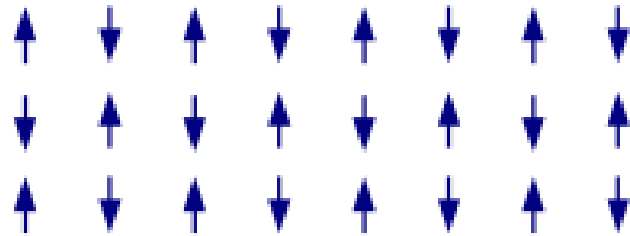
A  $T_C$  Curie-hőmérsékleten a domének feloszlanak (paramágneses fázisba történő másodrendű fázisátalakulás), mivel a termikus fluktuációk kompenzálják a mikroszkopikus momentumok közti kölcsönhatást.



Ferrimágneses anyagok (pl. magnezit): domének rendezett momentumokkal, de a szomszédos momentumok ellentétes irányba mutatnak.

Spontán polarizáció, hiszterézis, memória-effektus mint ferromágneseknél, de sokkal **kisebb szuszceptibilitás**.

**Antiferromágnes**: olyan ferrimágnes, amelyben a **szomszédos momentumok tökéletesen kioltják egymást**.



Úgy viselkedik mint egy paramágnes (nincs spontán mágnesezettség), kivétel a szuszceptibilitás hőmérsékletfüggése.

## 6 Illesztési feltételek

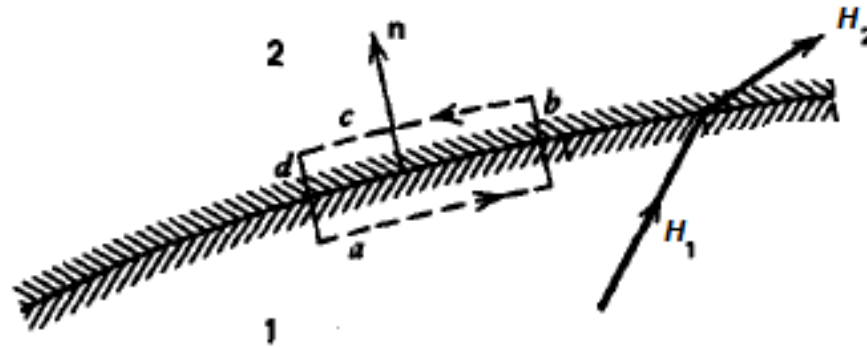
Különböző közegek határán a mágneses térjellemzők általában ugrást szenvednek, melynek számszerű értéke meghatározható az Ampère- és a mágneses Gauss-törvény segítségével.

Mivel a stacionárius töltésáramlás  $\vec{\mathcal{J}}$  áramsűrűség-vektorához hasonlóan a  $\vec{\mathbf{B}}$  indukcióvektor forrásmentes,  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = \operatorname{div} \vec{\mathcal{J}} = 0$ , ezért a  $\vec{\mathcal{J}}$ -hez hasonlóan a  $\vec{\mathbf{B}}$  normális komponense folytonosan változik két közeg határán: ha  $\vec{\mathbf{n}}$  jelöli a határfelület normálvektorát, míg  $\vec{\mathbf{B}}_2$  és  $\vec{\mathbf{B}}_1$  az indukció értékét a határfelület két különböző oldalán (egyazon pontban), akkor

$$\vec{\mathbf{B}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{B}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

## 6 ILLESZTÉSI FELTÉTELEK

Tekintsünk egy, a határfelületet merőlegesen metsző, kicsiny téglalapot, melyet az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  görbeszakaszok határolnak (megfelelő irányításokkal), és jelölje  $\gamma$  a téglalap és a határfelület metszészvonalát.



Az [Ampère-törvény](#) szerint

$$\int_a \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_b \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_c \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_d \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c} I_\gamma$$

ahol  $I_\gamma$  jelöli a téglalapon időegységenként átfolyó töltést.

Ha a **téglalapot rázsugorítjuk a határfelületre**, akkor  $b$  és  $d$  görbék hossza 0-hoz tart, így az ezek mentén vett integrálok is 0-hoz tartanak, míg  $a$  és  $c$  rásimul  $\gamma$ -ra, ezért (az irányítás figyelembe vételével)

$$\int_a \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \rightarrow - \int_{\gamma} \vec{\mathbf{H}}_1(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

és

$$\int_c \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \rightarrow \int_{\gamma} \vec{\mathbf{H}}_2(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

végeredményben

$$\int_{\gamma} \left( \vec{\mathbf{H}}_2 - \vec{\mathbf{H}}_1 \right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c} I_{\gamma}$$

Határfelület mentén történő töltésáramlás jellemezése a  $\vec{\mathcal{J}}_f$  felületi áram-sűrűség-vektorral, amely az áramlás irányába mutat (ezért tangenciális), míg nagysága megadja a felületen fekvő, az áramlás irányára merőleges egységnyi hosszon időegység alatt átáramló töltés mennyiségét, ahonnan

$$I_\gamma = \int_\gamma (\vec{\mathcal{J}}_f \times \vec{n}) \cdot d\vec{r}$$

Így végül

$$\int_\gamma \left( \vec{H}_2 - \vec{H}_1 - \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}}_f \times \vec{n} \right) \cdot d\vec{r} = 0$$

adódik bármely, a határfelületen futó  $\gamma$  görbére.

A  $\gamma$  görbét elég kicsinek választva belátható, hogy az integrál csak akkor tűnhet el minden görbére, ha az **integrandus** normális (határfelületre merőleges) irányú, azaz **tangenciális komponense zérus**.

Mivel a felületi áramsűrűség-vektor eleve tangenciális, ezért a  $\vec{\mathcal{J}}_f \times \vec{\mathbf{n}}$  vektoriális szorzat tangenciális ( $\vec{\mathbf{n}}$ -re merőleges) komponense megegyezik  $\vec{\mathcal{J}}_f$ -fel, ahonnan azt kapjuk, hogy a

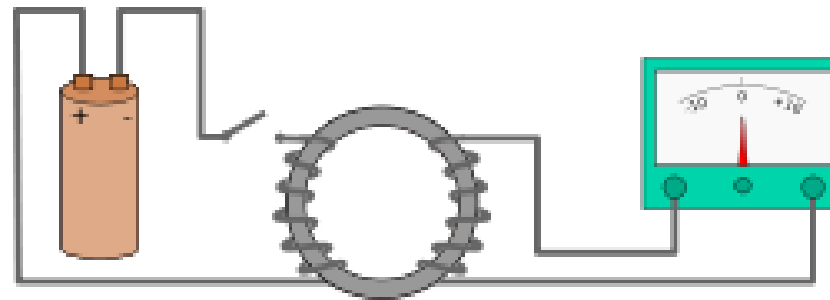
a mágneses térerősség tangenciális komponensének ugrása egyenlő a felületi áramsűrűség  $\frac{4\pi}{c}$ -szeresével!



### 7 Elektromágneses indukció

Mozgó elektromos töltések mágneses mezőt generálnak (Oersted, 1820), de nincs fordított folyamat, mert nincsenek mágneses töltések.

**Elektromágneses indukció** (Faraday, 1831): időben változó mágneses mező elektromos áramot indukál egy vezető áramkörben.



A baloldali ('**primér**') áramkör zárásánál, illetve megszakításánál a jobboldali ('**szekundér**') körben rövid idejű áramlökés észlelhető.

## 7 ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

---

Időben változó mágneses mező lehetséges okai:

- mozgó permanens mágnesek, illetve helyváltató elektromos áramok ('mozgási indukció');
- helyhez rögzített, de időben változó erősségű elektromos áramok ('nyugalmi indukció').

Konduktív töltésáramért felelős mikroszkopikus töltéshordozók mozgásához szükséges elektromotoros erő forrása a mágneses mező, ezért

az elektromos mező többé már nem konzervatív!

Szerteágazó alkalmazások:

1. elektromos generátorok és motorok;
2. elektromos fűtés (indukciós kemencék);
3. elektromos energia továbbítása (transzformátorok);
4. mérőműszerek (sebességmérő);
5. mágneses fékrendszerek;
6. Föld mágneses mezejének kurrens magyarázata (**dinamó-elmélet**).

## 8 A fluxus-szabály

**Fluxus-szabály:** egy zárt áramkörben indukált elektromotoros erő arányos az áramkör által kifizített bármely (esetlegesen időben változó)  $\Sigma$  felület

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

mágneses fluxusának változási sebességével

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt}$$

A negatív előjel miatt az indukált áram által keltett mágneses mező csökkenti az indukáló fluxust (**Lenz-törvény**).

A Stokes-tétel következtében

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

A fluxus-szabály alapján

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \right) = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

ha  $\Sigma$  nem változik az időben (időderiválás felcserél az integrálással).

A  $\Sigma$  felületet összehúzva egy pontra adódik a **Faraday-törvény**

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Az elektromos térerősség többé már nem örvénymentes!

# 9 Örvényáramok

Időben változó mágneses mező vezető közegben örvényáramokat (**Foucault-áramok**) indukál, melyek egyrészt **energiát disszipálnak** (Joule-hő), másfelől olyan mágneses mezőt keltenek, amely csökkenti a mágneses fluxus változási sebességét (**Lenz-törvény**).

Transzformátorokban és elektromos motorokban az örvényáramok adják az energiadisszipáció fő mechanizmusát, csökkentve azok hatékonyságát.

Gyakorlati alkalmazások: elektromágneses fékezés (ABS), **fémek azonosítása és szétválasztása** (pl. pénzautomaták), indukciós fűtés, stb.

# 10 Kvázi-stacionárius áramok

Nem túl gyorsan változó erősségű (kvázi-stacionárius) áramok esetén

1. különböző közegek határán az áramsűrűség normális komponense folytonosan változik;
2. vezető cső bármely két keresztmetszetén ugyanannyi töltés áramlik át egységnyi idő alatt;
3. egy hálózat bármely csomópontjába befolyó áramok intenzitásainak összege megegyezik a kifolyó áramok intenzitásainak összegével (csomóponti szabály).

Új jelenségek:

1. mivel **nincs tökéletes szigetelő** (a vákuum kivételével), ezért mindig fellép **kisülési áram** (kapacitív tagok);
2. **változó erősségű áram által keltett változó erősségű mágneses mező maga is áramot indukál** (**induktív tagok**).

A kisülési és az indukált áramok figyelembevételével módosul a hurok-szabály (Kirchhoff második törvénye), ezért ebben az esetben az áramerős-ségek meghatározására **lineáris egyenletrendszer helyett egy másodrendű, közösleges differenciálegyenlet-rendszer** adódik.



## 11 Indukciós együtthatók

Egy elektromos hálózatban az időben változó erősségű áramok időben változó mágneses mezőt hoznak létre, amely a zárt hurkokban áramot indukál.

Mivel a mágneses mező térerőssége arányos az őt keltő áram erősségével, ezért az egyes **hurkok mágneses fluxusai az áramerősségek lineáris kifejezései**: ha  $\Phi_k$ , ill.  $I_k$  jelöli a  $k$ -adik hurok fluxusát, ill. a benne folyó áram erősségét, akkor

$$\Phi_i = c \sum_k L_{ik} I_k$$

Az  $L_{ik}$  indukciós együtthatók függetlenek az áramerősségektől, csak a hálózat geometriájától és anyagi összetételétől függenek (a diagonális  $L_{ii}$  elemek az önindukciós együtthatók).

Az indukciós együtthatók szimmetrikus mátrixot alkotnak:

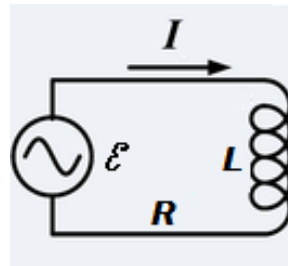
$$L_{ik} = L_{ki}$$

Az  $i$ -edik hurokban indukált elektromotoros erő, amely hozzáadódik a hurokban esetleg előforduló áramforrások elektromotoros erejéhez

$$\mathcal{E}'_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt}$$

## Példa: az RL–kör

Tekintsünk egy  $R$  ellenállású és  $L$  önindukciójú vezető hurkot, amelyet egy  $\mathcal{E}(t)$  elektromotoros erejű áramforrás táplál.



A huroktörvény szerint az  $I(t)$  áramerősségre

$$RI(t) = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}'(t)$$

adódik, ahol

$$\mathcal{E}'(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

az áram által indukált elektromotoros erő.

Elsőrendű közönséges

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$

lineáris differenciálegyenlet az áramerősségre.

A homogén egyenlet (ha  $\mathcal{E}(t)=0$ ) megoldása

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) = I_0 e^{-t/\tau}$$

vagyis (a Lenz-törvény következményeként) exponenciálisan csökkenő

áramerősség:  $\tau = \frac{L}{R} > 0$  a relaxációs idő,  $I_0$  a kezdeti ( $t=0$ ) áramerősség.

Lineáris differenciálegyenletek esetén az inhomogén egyenlet általános megoldása előáll mint a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet bármely partikuláris megoldásának összege.

Időfüggetlen  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$  gerjesztés esetén az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása a stacionér (időfüggetlen)

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

míg az általános megoldás

$$I(t) = \left(I_0 - I_\infty\right)e^{-t/\tau} + I_\infty$$

egy exponenciálisan lecsengő, csak a kezdeti feltételektől függő **tranziens**, és egy, a **hosszú távú aszimptotikus viselkedést** leíró, a gerjesztés által teljes mértékben meghatározott **stacionárius tag** szuperpozíciója.

$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  **harmonikus gerjesztés** esetén a stacionér tag

$$I_\infty(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$\omega$  frekvenciájú harmonikus aszimptotikus viselkedés megfelelő  $A$  és  $B$  integrációs állandókkal. A differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = I(t) + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} =$$

$$\left\{ A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right\} + \tau \left\{ -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \right\}$$

ahonnan

$$A + B\omega\tau = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$B - A\omega\tau = 0$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{R(1 + \omega^2\tau^2)} = \frac{\mathcal{E}_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$B = \frac{\mathcal{E}_0 \omega \tau}{R(1 + \omega^2\tau^2)} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Az aszimptotikus áramerősség

$$I_{\infty}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t - \delta) = \frac{1}{Z} \mathcal{E} \left( t - \frac{\delta}{\omega} \right)$$

ahol

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

a hurok **impedanciája**, és

$$\delta = \arctan(\omega\tau) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

a fáziskésés.

Hosszú távon a - kezdeti áramerősség által meghatározott - **tranziens tag** **exponenciálisan lecseng**, és csak a stacionárius tag marad meg.

## 12 A rezgőkör

Tekintsünk egy  $R$  ellenállású és  $L$  önindukciójú vezető hurkot, amelyet egy  $\mathcal{E}(t)$  elektromotoros erejű áramforrás táplál, és egy  $C$  kapacitású kondenzátor szakít meg.

Jelölje  $Q(t)$  a kondenzátor fegyverzetein  $t$  időpillanatban mérhető töltést, míg  $I(t)$  a hurokban folyó áram erősségét. Ez utóbbi – a csomóponti törvény következtében – megegyezik a fegyverzeteket elválasztó szigetelő véges vezetőképessége miatt azok között folyó kisülési árammal, vagyis a fegyverzetek töltésének időegység alatti megváltozásával, vagyis

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$



A kapacitás definíciója szerint a fegyverzetek között a potenciálkülönbség

$$U = \frac{Q(t)}{C}$$

így a huroktörvény módosított alakja

$$RI(t) = \mathcal{E}(t) - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q(t)}{C}$$

Mindent összevetve, a

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = \mathcal{E}(t)$$

másodrendű differenciálegyenlet adódik a  $Q(t)$  töltésre, illetve

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \dot{\mathcal{E}}(t)$$

az  $I(t)$  áramerősségre, ahol  $\dot{\mathcal{E}}(t)$  jelöli az elektromotoros erő időderiváltját.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$I(t) = I_0 e^{-\Gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} t + \delta)$$

ahol  $\Gamma = \frac{R}{2L}$  a rezgőkör **csillapítási együtthatója**, és  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  annak **rezonancia-frekvenciája**, míg  $I_0$  és  $\delta$  a kezdeti feltételek által meghatározott integrációs állandók.

Harmonikus rezgések még külső gerjesztés hiányában is!

Más-más aszimptotikus viselkedés aszerint, hogy  $\omega_0^2 < \Gamma^2$  vagy  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ .

Ha  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ , akkor  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  **harmonikus gerjesztés** esetén az

**inhomogén egyenlet partikuláris megoldása**

$$I_p(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi)$$

Harmonikus kényszerrezgések (aszimptotikusan, amikor a tranziensek már lecsengtek), ahol

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

az impedancia és

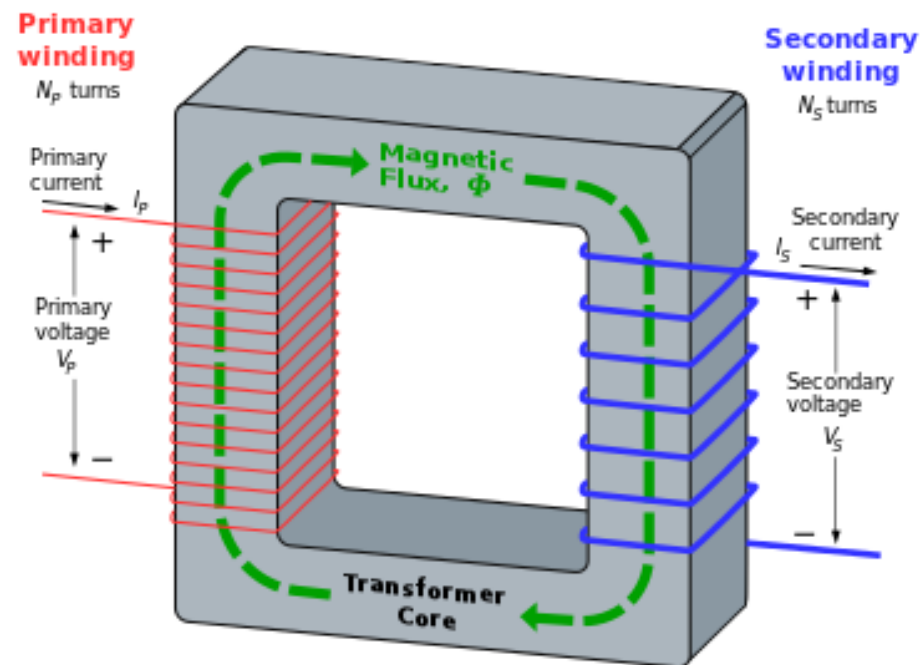
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) = \arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Gamma\omega}\right)$$

a fáziskésés.

Az impedancia az  $\omega = \omega_0$  rezonancia-frekvencián minimális, amikor a fáziskésés eltűnik, és az oszcillátor közönséges ellenállásként viselkedik.

# 13 A transzformátor

Induktívan csatolt primér és szekunder körök miatt a szekunder körben folyó áramot meghatározza a primér kör elektromotoros ereje.



Ha  $I_1$  és  $I_2$  jelöli a primér és szekunder körökben folyó áramok erősségét,  $R_1$  és  $R_2$  az ellenállásukat,  $\mathcal{E}(t)$  a primér kör elektromotoros erejét, és  $L_{ik}$  az indukciós együtthatókat, akkor a hurok-szabály alapján

$$R_1 I_1(t) = -L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} + \mathcal{E}(t)$$

$$R_2 I_2(t) = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt}$$

Innen

$$R_2 I_2(t) = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} - \frac{L_{22}}{L_{12}} \left( \mathcal{E}(t) - R_1 I_1(t) - L_{11} \frac{dI_1}{dt} \right)$$

$$= -\frac{L_{22}}{L_{12}} (\mathcal{E}(t) - R_1 I_1(t)) - \left( L_{21} - \frac{L_{22}}{L_{12}} L_{11} \right) \frac{dI_1}{dt}$$

Geometriai megfontolásokból

$$\frac{L_{12}}{L_{11}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{L_{22}}{L_{21}}$$

ahol  $N_1$  és  $N_2$  a primér és szekunder körök menetszámát jelöli, míg az indukciós együtthatók szimmetriája következtében

$$L_{12} = L_{21}$$

Amennyiben a primér kör ellenállása kicsi, akkor az előzőek alapján

$$R_2 I_2(t) = -\frac{L_{22}}{L_{12}} \mathcal{E}(t) = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}(t)$$

ami olyan, mintha a szekunder körben folyó áramot egy

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}(t)$$

elektromotoros erejű áramforrás tartaná fenn: feszültség-sokszorozás.