A Maxwell–egyenletek

Téregyenlet: konkrét szituációtól (pl. teret kitöltő közeg milyensége) független, lokális (pontonként teljesülő) összefüggés a térjellemzők között.

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho \qquad \text{Gauss–törvény}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{J}} \qquad \text{Ampère–törvény}$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \text{mágneses Gauss–törvény}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \text{Faraday–törvény}$$

1. Az eltolási áram

Maxwell felismerése: egy vektormező rotációja mindig forrásmentes,

ezért az Ampère–törvény következtében

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{J}} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\vec{\mathbf{H}} = 0$$

De a lokális töltésmegmaradást kifejező

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{J}} = 0$$

kontinuitási egyenlet miatt ez csak időben állandó ρ esetén lehetséges.

Mivel a ρ töltéssűrűséget szabadon tudjuk változtatni megfelelő töltésáramok létrehozásával, ezért az Ampère–törvény módosításra szorul!

A kontinuitási egyenlet és az (elektromos) Gauss-törvény következtében

$$\mathbf{div}\left\{\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}-\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}\right\}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{div}\,\vec{\mathfrak{J}}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}})}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

ezért feltételezhető, hogy a zárójel alatti tag azonosan eltűnik:

$$\boxed{\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}=\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}}$$

A korrekciós tag az eltolási áram, amely nem túl gyors ('kvázi-stacionárius') időbeli változás esetén elhanyagolható, mert ilyenkor $\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right|\ll|\vec{\mathfrak{J}}|$.

Következmény: nem csak a mozgó töltések, de az időben változó elektromos mező is lehet a mágneses mező forrása, ezért a forrásoktól távol is létezhet elektromágneses mező (elektromágneses sugárzás).

2. Anyagi összefüggések és illesztési feltételek

A Maxwell-egyenletek rendszere

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho \qquad \text{elektromos Gauss–törvény}$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \text{mágneses Gauss–törvény}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \text{Ampère–törvény}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \text{Faraday–törvény}$$

Az egyenletek bemenő adatai (források) – a $\rho(\vec{\mathbf{r}},t)$ töltés- és a $\vec{\mathfrak{J}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ áramsűrűség – nem függetlenek egymástól, összeköti őket a lokális töltésmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet.

Érvényességi feltétel: a térjellemzők folytonosan differenciálható ('sima') függvényei a helynek és időnek, és a kölcsönhatás lokális, azaz a környezet hatása csak a vizsgált térrész határán jelentkezik.

A két vektoriális és két skaláris Maxwell-egyenlet 6+2=8 összefüggést ad 12 független mennyiség (a négy térjellemző vektorkomponensei) között, vagyis alulhatározott az egyenletrendszer, ezért egyértelmű megoldás létezéséhez szükséges további, a teret kitöltő közeg tulajdonságait leíró

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})$$
$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})$$

anyagi összefüggések figyelembevétele.

Marad 8 összefüggés 6 független vektorkomponens között, azaz egy (látszólag) túlhatározott egyenletrendszer adódik. Viszont

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}}-4\pi\rho) = \mathbf{div}\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) - 4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
$$= \mathbf{div}\left(c\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} - 4\pi\vec{\mathbf{J}}\right) + 4\pi\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{J}} = 0$$

a kontinuitási egyenlet következtében, másrészt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}}) = \mathbf{div}\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right) = -c\,\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

ezért a skaláris Maxwell-egyenleteknek elég egyetlen kezdeti időpontban teljesülniük, hogy mindig teljesüljenek.

Elsőrendű (lineáris) parciális differenciálegyenlet-rendszer, amelynek megoldásához szükség van megfelelő peremfeltételek megadására.

Peremfeltételek különféle típusai:

- kezdeti feltételek, amelyek a térjellemzők valamely kezdeti időpontban felvett értékét adják meg;
- határfeltételek, amelyek leírják a térjellemzők viselkedését a vizsgált tartomány határán, és ezáltal jellemzik a tartományon kívüli források hatását;
- illesztési feltételek, amelyek a térjellemzőknek különböző közegek határán bekövetkező diszkontinuitását ('ugrás') írják le, és a Maxwell-egyenletek integrális alakjából származtathatók.

A Maxwell-egyenletek – a vektoranalízis integráltételei segítségével származtatott – integrális alakja

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c}\mathcal{I} + \frac{1}{c}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = 4\pi Q$$

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = 0$$

ahol $\mathcal{I}$ az $\mathcal{S}$ felületen időegység alatt átáramló töltés mennyisége, míg Q a $\mathcal{V}$ tartományban található összes töltés.

Illesztési feltételek különböző közegek határán:

1. $\vec{\mathbf{E}}$ tangenciális és $\vec{\mathbf{B}}$ normális komponense folytonosan változik;

2. $\vec{\mathbf{D}}$ normális komponensének ugrása a felületi töltéssűrűség 4π-szerese;

3. $\vec{\mathbf{H}}$ tangenciális komponensének ugrása a felületi áramsűrűség $\frac{4\pi}{c}$-szerese

A többi komponens esetleges ugrása a fentiek alapján határozható meg, figyelembe véve a két közeget jellemző anyagi összefüggéseket.

Külön-külön meg kell oldani a Maxwell-egyenleteket a teret kitöltő minden egyes közeg belsejében a megfelelő peremfeltételek (határ- és/vagy illesztési feltételek) figyelembe vételével.

3. Elektromágneses potenciálok

Az indukcióvektor forrásmentessége ($\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}}=0$ mágneses Gauss-törvény) következtében létezik olyan $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ vektormező – a vektorpotenciál –, amelyre

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}}$$

Innen, a Faraday–törvény alapján

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}\big) = \mathbf{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)$$

vagyis

$$\mathbf{rot}\left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) = \vec{\mathbf{0}}$$

Mivel a zárójelben lévő kifejezés örvénymentes, ezért létezik egy olyan $\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ skalármező – a skalárpotenciál –, amelyre

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}}$$

Az elektromágneses mező teljes mértékben jellemezhető az $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ és $\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ elektromágneses potenciálokkal, de ez a jellemzés nem egyértelmű (mértékinvariancia): tetszőleges $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ skalármező esetén

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$
$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \mathbf{grad}\,\psi$$

potenciálok ugyanazt a mezőt írják le, mint $\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ és $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$!

Valóban,

$$\vec{\mathbf{E}}'(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mathbf{grad}\,\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t} = -\mathbf{grad}\left(\Phi - \frac{1}{c}\cancel{\frac{\partial \psi}{\partial t}}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathbf{A}} + \cancel{\mathbf{grad}\,\psi}\right)$$

$$= -\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

és

$$\vec{\mathbf{B}}'(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}' = \mathbf{rot}\left(\vec{\mathbf{A}} + \mathbf{grad}\,\psi\right) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}} + \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\psi = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

Következmény: a potenciálok nem megfigyelhető mennyiségek (klasszikus fizikában), nincs közvetlen fizikai értelmük (szemben a térjellemzőkkel).

Bár az elektromágneses potenciálok nem egyértelműek, sok kérdés tárgyalása egyszerűbb a segítségükkel.

Észrevétel. Ha egy α konstans esetén a $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ skalármező kielégíti a

$$\boldsymbol{\Delta}\psi - \frac{\alpha}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} - \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenlet – ilyen $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ mindig létezik –, akkor

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}}' + \alpha\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = \mathbf{div}\left(\vec{\mathbf{A}} + \mathbf{grad}\,\psi\right) + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$$

ezért mindig előírható a

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} = -\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad \text{Lorentz–feltétel}$$

a potenciálok között.

4. Elektromágneses energia és impulzus

Vizsgáljuk az elektromágneses mezőt egy homogén, izotrop, $\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{B}}=\mu\vec{\mathbf{H}}$ lineáris anyagi összefüggésekkel jellemzett közegben.

Az Ampère–törvény mindkét oldalát skalárisan szorozva $\vec{\mathbf{E}}$-vel

$$\vec{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}=\vec{\mathbf{E}}\cdot\left\{\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right\}=\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}+\frac{1}{c}\vec{\mathbf{E}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

míg a Faraday–törvény mindkét oldalát skalárisan szorozva $\vec{\mathbf{H}}$-val

$$\vec{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}=-\frac{1}{c}\vec{\mathbf{H}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

ahonnan

$$\vec{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}-\vec{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}=\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}+\frac{1}{c}\vec{\mathbf{E}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}+\frac{1}{c}\vec{\mathbf{H}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Innen, a

$$\mathbf{div}\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}$$

vektoranalitikai összefüggés felhasználásával

$$\frac{1}{c}\vec{\mathbf{E}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}+\frac{1}{c}\vec{\mathbf{H}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}+\mathbf{div}\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}})=-\frac{4\pi}{c}\vec{\mathfrak{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}$$

De a lineáris anyagi összefüggések következtében

$$\vec{\mathbf{E}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}=\varepsilon\vec{\mathbf{E}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial(\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{E}})}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{D}})}{\partial t}$$

és hasonlóan

$$\vec{\mathbf{H}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}=\mu\vec{\mathbf{H}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}=\frac{\mu}{2}\frac{\partial(\vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{H}})}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{B}})}{\partial t}$$

Bevezetve a

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{8\pi}(\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{B}})$$

és

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}$$

jelöléseket, végül a

$$\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t} + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{S}} = -\vec{\mathfrak{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}$$

energiamérleg-egyenletet kapjuk.

Megjegyzés: $\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ dimenziója energia/térfogat, és $\varepsilon, \mu \geq 0$ következtében $\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ sose lehet negatív.

Tekintsük töltések egy olyan zárt rendszerét, amelyek egy $\mathcal{V}$ térbeli tartomány belsejében mozognak. Tekintve, hogy $\vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}$ az egységnyi térfogatban található töltéshordozókon az elektromágneses mező által egységnyi idő alatt végzett munka, ezért

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathtt{kin}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} (\vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

ahol $\mathcal{E}_{\mathtt{kin}}$ az összes töltéshordozó kinetikus energiáinak összege.

Mivel egy zárt rendszerben a különböző energiafajták összege állandó, így – felhasználva az energiamérleg-egyenletet –

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathtt{em}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathtt{kin}}}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_{\mathcal{V}} (\vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{S}}\right)\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

ahol $\mathcal{E}_{\mathtt{em}}$ az elektromágneses mező $\mathcal{V}$-beli energiája.

A Gauss–tétel alapján

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{S}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

Mivel a töltésrendszer nem hat kölcsön a környezetével, ezért $\mathcal{V}$ határán az elektromágneses térerősségek szükségszerűen eltűnnek, és így a felületi integrál zérus, következésképp

$$\frac{\mathsf{d}\mathcal{E}_{\mathtt{em}}}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left\{\int_{\mathcal{V}} \mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t)\ \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}\right\}$$

vagyis $\int_{\mathcal{V}} \mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t)\ \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$ adja a $\mathcal{V}$-ben tárolt elektromágneses energiát, ezért $\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t)$ az elektromágneses mező energiasűrűsége!

Tekintsünk most egy olyan $\mathcal{V}$ tartományt, amely nem tartalmaz töltéseket, ezért belsejében az áramsűrűség zérus. Az előzőek alapján a $\mathcal{V}$-ben tárolt elektromágneses energia változási sebessége

$$\frac{\mathsf{d}\mathcal{E}_{\mathsf{em}}}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left\{\int_{\mathcal{V}} \mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t)\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}\right\} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{S}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = -\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

Mivel $\mathcal{V}$ belsejében nincsenek töltések, ezért az elektromágneses energia csak akkor változhat, ha energia áramlik át a határon, és az $\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$ felületi integrál adja az időegység alatt a határon átfolyó elektromágneses energiát, következésképp a

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}$$

Poynting-vektor adja az elektromágneses mező energiaáram-sűrűségét.

Ha mind konvektív, mind konduktív áramok előfordulhatnak, akkor az

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\texttt{konv}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{S}} = -\vec{\mathfrak{J}}_{\texttt{kond}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

energiamérleget egy $\mathcal{V}$ térbeli tartományra integrálva adódik

$$\frac{\mathsf{d}\mathcal{E}_{\texttt{kin}}}{\mathsf{d}t} + \frac{\mathsf{d}\mathcal{E}_{\texttt{em}}}{\mathsf{d}t} + \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = -\int_{\mathcal{V}} (\vec{\mathfrak{J}}_{\texttt{kond}} \cdot \vec{\mathbf{E}})\, \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

Itt $\mathcal{E}_{\texttt{kin}}$ jelöli a $\mathcal{V}$ tartományban található töltések (konvektív) mozgásból származó kinetikus energiáját, $\mathcal{E}_{\texttt{em}}$ az elektromágneses mező $\mathcal{V}$-ben tárolt energiája, az $\vec{\mathbf{S}}$ Poynting-vektor felületi integrálja a $\mathcal{V}$ határán időegység alatt átáramló elektromágneses energia, míg a jobb oldali tag a konduktív töltésáramlás során disszipálódó energia (Joule-hő), amely a környezet termikus energiájaként jelenik meg.

Hasonló megfontolások (impulzus megmaradása) következményeként

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{1}{4\pi c}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{S}}$$

az elektromágneses mező impulzussűrűsége.

Megjegyzés: az impulzussűrűségnek az $\vec{\mathbf{S}}$ Poynting-vektorral, vagyis az energiáram sűrűségével való arányossága az elektromágneses kölcsönhatás végtelen hatótávolságának következménye.

További megmaradó mennyiségek (pl. impulzusmomentum, kiralitás, stb.) származtathatók a Maxwell-egyenletek szimmetriáiból (Noether-tétel révén), míg a töltésmegmaradás a mértékinvarianciával kapcsolatos.