Elektromágneses hullámok

Maxwell-egyenletek töltések és áramok hiányában

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

Energiát és impulzust szállító nem-triviális megoldások olyan térrészekben is, ahol nincsenek források (elektromágneses sugárzás)!

Sugárzás forrásai a gyorsuló töltések.

1. Retardált potenciálok

$\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{B}}=\mu\vec{\mathbf{H}}$ lineáris anyagi összefüggésekkel jellemzett homogén, izotrop közegben az elektromágneses mező jellemezhető a $\Phi(\vec{\mathbf{r}},t)$ skalár- és $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ vektorpotenciál segítségével

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Mértékinvariancia miatt kiköthető a

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{Lorentz–feltétel}$$

Gauss-törvény felhasználásával

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$$

$$= \mathbf{div}\left(\mathbf{grad}\,\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

vagyis

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\Phi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho}$$

Hasonló módon, az Ampère–törvény következtében

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}) = \mathbf{rot}(\mu\vec{\mathbf{H}}) = \mu\left\{\frac{4\pi}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right\} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

$$= \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\mathbf{grad}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}$$

$$= \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{grad}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}}) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}$$

Átrendezés után, $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}}) - \boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{A}}$ felhasználásával

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{A}} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Bevezetve a

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

jelölést

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} = -\frac{c}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

a Lorentz–feltétel alakja és

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{\mathbf{J}}$$

Inhomogén hullámegyenlet a potenciálokra!

Hullámegyenlet partikuláris megoldása

$$\Phi\left(\vec{\mathbf{R}}, t\right) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho\left(\vec{\mathbf{r}}, t - \frac{1}{\mathrm{v}}\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}\right|\right)}{\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}\right|}\, \mathrm{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{R}}, t\right) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{\mathfrak{J}}\left(\vec{\mathbf{r}}, t - \frac{1}{\mathrm{v}}\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}\right|\right)}{\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}\right|}\, \mathrm{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

retardált potenciálok

A potenciálok $\vec{\mathbf{R}}$ pontbeli értékét a t időpontban a források (távolsággal arányos) korábbi időpontokban felvett értékei határozzák meg.

Egy adott pontban a töltésekben és áramokban beálló változás a potenciálok értékét d távolságra csak $\dfrac{d}{\mathrm{v}}$ késleltetéssel befolyásolja, vagyis v az elektromágneses hatások terjedési sebessége!

2. Hullámterjedés

Az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ fizikai mennyiség hullámszerűen terjed, ha kielégíti a

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\mathcal{A} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = 0}$$

homogén hullámegyenletet a forrásoktól távol (v sebesség dimenziójú paraméter). A hullámok kisugárzását és elnyelését a

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{A} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = \mathcal{B}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

inhomogén hullámegyenlet írja le (itt $\mathcal{B}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ a hullámforrás jellemzője).

Példák: hanghullámok, nehézségi hullámok, szeizmikus hullámok, rádióhullámok, gravitációs hullámok, stb.

Homogén hullámegyenlet alakja Descartes-koordinátákban

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = 0$$

függetlenül attól, hogy $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ egy skalár, avagy egy vektormező valamely Descartes-komponense.

Hullámfront: olyan összefüggő felület, amely mentén egy adott időpillanatban az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ maximális értéket vesz fel (idő múlásával a hullámfrontok alakja és helyzete is változhat).

Gyakori hullámtípusok:

1. Síkhullám esetén a hullámfrontok egymással párhuzamos, közös $\vec{\mathbf{n}}$ normálisuk irányában egyenletes v sebességgel haladó síkok, vagyis $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ nem függ külön-külön a helytől és az időtől, csak a $\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$ kombinációtól, így alakja

$$\boxed{\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathscr{A}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}$$

valamely egyváltozós $\mathscr{A}$ függvényre.

2. Hengerhullámok esetén a hullámfrontok egyenletes v sebességgel táguló koaxiális hengerfelületek.

3. Gömbhullám esetén a hullámfrontok koncentrikus, egyenletes v sebességgel táguló, $\vec{\mathbf{r}}_0$ centrumú gömbfelületek, ezért a centrumtól mért $|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|$ távolság és $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)$ szorzata csak a $\mathrm{v}t-|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|$ kombinációtól függ, azaz

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|}\mathscr{A}(\mathrm{v}t-|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|)$$

valamely egyváltozós $\mathscr{A}$ függvényre.

Megjegyzés: gömbhullám centrumától nagy távolságra

$$|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|=\sqrt{\vec{\mathbf{r}}_0^{\,2}+\vec{\mathbf{r}}^{\,2}-2\vec{\mathbf{r}}_0\cdot\vec{\mathbf{r}}}\approx|\vec{\mathbf{r}}_0|+\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$$

ha $|\vec{\mathbf{r}}|\ll|\vec{\mathbf{r}}_0|$, ahol

$$\vec{\mathbf{n}}=-\frac{\vec{\mathbf{r}}_0}{|\vec{\mathbf{r}}_0|}$$

ezért

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|}\mathscr{A}(\mathrm{v}t-|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|)\approx\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_0|}\mathscr{A}\big(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-|\vec{\mathbf{r}}_0|\big)$$

Centrumától nagy távolságra a gömbhullám síkhullámmal közelíthető!

A hullámegyenlet lineáris, ezért megoldások (pl. sík-, ill. gömbhullámok) szuperpozíciója is megoldás; fordítva, bármely megoldás előállítható akár gömb-, akár síkhullámok szuperpozíciójaként.

Huygens-Fresnel–elv: tetszőleges hullám előállítható bármely, a hullámforrást a belsejében foglaló zárt felületen kívül, mint ezen felület egyes pontjaiból kiinduló koherens gömbhullámok ('másodlagos hullámok') szuperpozíciója.

Monokromatikus síkhullám: $\mathcal{A}$ szinuszosan változik az időben ($\mathcal{A}_0$ az amplitúdó és $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$ a frekvencia), azaz

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\mathcal{A}_0\cos(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

valamely $[\text{idő}]^{-1}$ dimenziójú ω skalárra és $[\text{hossz}]^{-1}$ dimenziójú

$$\vec{\mathbf{k}}=\frac{\omega}{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{n}}$$

vektorra (hullámszám-vektor).

Periodikus időfejlődés $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ periódusidővel.

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{A}=-\left|\vec{\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{A}\qquad\text{és}\qquad\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial t^2}=-\omega^2\mathcal{A}$$

Hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{\mathbf{k}}|} = \mathrm{v}T$$

Síkhullám spektrálfelbontása

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \int \mathcal{A}_0(\omega)\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Bármely síkhullám felbontható monokromatikus síkhullámok összegére (Fourier-dekompozíció).

Síkhullám jellemezhető a hullámterjedés $\vec{\mathbf{n}}$ irányával és az $\mathcal{A}_0(\omega)$ frekvenciafüggő amplitúdóval.

3. Elektromágneses síkhullámok terjedése

ε permittivitású és μ permeabilitású homogén és izotróp dielektrikum ($\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{B}}=\mu\vec{\mathbf{H}}$).

Források hiányában ($\rho=0$ és $\vec{\mathfrak{J}}=\vec{\mathbf{0}}$) a Maxwell–egyenletek

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

Innen

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}$$

és

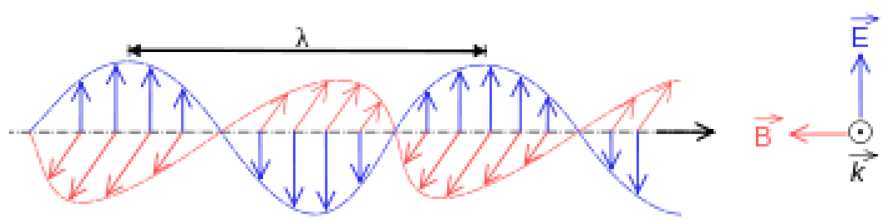
$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

$\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{H}}$ kielégítik a hullámegyenletet, ezért léteznek

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{H}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

elektromágneses síkhullám megoldások, ahol

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$



Láncszabály alapján (vesszővel jelölve egyváltozós függvények közönséges deriváltjait)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \, \frac{\partial(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{\partial x} = -n_x \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

és hasonlóan a többi koordinátára, ahonnan

$$\mathbf{div}\, \vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -n_x \mathcal{E}_x' - n_y \mathcal{E}_y' - n_z \mathcal{E}_z' =$$
$$= -\left(n_x \mathcal{E}_x + n_y \mathcal{E}_y + n_z \mathcal{E}_z\right)' = -\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

valamint

$$\mathbf{div}\, \vec{\mathbf{H}} = -n_x \mathcal{H}_x' - n_y \mathcal{H}_y' - n_z \mathcal{H}_z' = -\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

Másrészt

$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -n_y\mathcal{E}'_z + n_z\mathcal{E}'_y = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_x$$
$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -n_z\mathcal{E}'_x + n_x\mathcal{E}'_z = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_y$$
$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -n_x\mathcal{E}'_y + n_y\mathcal{E}'_x = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_z$$

ahonnan

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = -\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

Végül

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \frac{\partial\,(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{\partial t} = \mathrm{v}\mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

ezért

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \mathrm{v}\vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = \mathrm{v}\vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

Mivel a hullámegyenlet következménye a Maxwell–egyenleteknek, ezért azoknál kevésbé megszorító, így nem minden megoldása lesz egyben megoldása a Maxwell–egyenleteknek.

Milyen további feltételek fennállása esetén teljesülnek a Maxwell–egyenletek?

$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ Ampère–törvényből ($\xi = \frac{\varepsilon \mathrm{v}}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ jelöléssel)

$$-\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = \xi\vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

ahonnan

$$\vec{\mathcal{E}}(x) = -\xi^{-1}\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}(x)$$

Innen $x = \mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$ behelyettesítéssel adódik

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\xi^{-1}\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)}$$

Hasonló módon, a $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}$ Faraday–törvényből

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \xi\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)}$$

Következmények:

1. Mind az $\vec{\mathbf{E}}$ elektromos, mind a $\vec{\mathbf{H}}$ mágneses térerősség merőleges a hullámterjedés $\vec{\mathbf{n}}$ irányára, ezért az elektromágneses síkhullámok transzverzálisak!

2. $\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \xi\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$ miatt $\varepsilon\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2 = \mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$, ezért az elektromágneses síkhullám energiasűrűségének

$$u_e(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\varepsilon}{8\pi}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$$

elektromos és

$$u_m(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu}{8\pi}\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$$

mágneses járulékai megegyeznek!

3. A térerősségek nem csak a hullámterjedés $\vec{\mathbf{n}}$ irányára, de egymásra is merőlegesek, ezért az energiaáram-sűrűség (Poynting-vektor) a hullám terjedési irányába mutat:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}} = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{\mathbf{E}}\right|\left|\vec{\mathbf{H}}\right|\vec{\mathbf{n}} = \frac{c\xi}{4\pi}\vec{\mathbf{E}}^2\vec{\mathbf{n}} = \mathrm{v}\mathfrak{u}\vec{\mathbf{n}}$$

ahol

$$\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{D}}+\vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{8\pi} = \mathfrak{u}_e(\vec{\mathbf{r}},t)+\mathfrak{u}_m(\vec{\mathbf{r}},t)$$

a síkhullám energiasűrűsége.

$\boxed{\text{Az energia v sebességgel terjed a hullámterjedés irányában!}}$

4. A térerősségek együtt oszcillálnak, vagyis egyszerre veszik fel maximális értéküket.

Monokromatikus síkhullám esetén

$$\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathbf{E}}_0\cos(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$
$$\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathbf{H}}_0\cos(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

ahol

$$\vec{\mathbf{H}}_0=\frac{c}{\mu\omega}\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}}_0$$

$\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{E}}_0=0$ (transzverzalitás miatt) és $\omega=\mathrm{v}\left|\vec{\mathbf{k}}\right|$ (diszperziós reláció).

Síkhullám intenzitása (energiaáram időátlaga egy periódusra)

$$\mathcal{I}=\frac{1}{T}\int_0^T\left|\vec{\mathbf{S}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|dt=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{v}\mathbf{u}(\vec{\mathbf{r}},t)\,dt=\frac{c}{4\pi T}\xi\int_0^T\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|^2dt$$
$$=\frac{c}{4\pi}\xi\left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|^2\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})dt=\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|^2$$

Vezető közegben $\textbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \textbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$ miatt a síkhullámok továbbra is transzverzálisak, vagyis az elektromos és mágneses térerősségek merőlegesek a terjedés irányára, viszont a síkhullám elektromos mezeje által keltett konduktív töltésáram által disszipált energia következtében a síkhullámok terjedésük során exponenciálisan csillapodnak, a térerősségek alakja

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\Big\{-\frac{\omega\kappa}{c}\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\Big\}\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{H}}_0 \exp\Big\{-\frac{\omega\kappa}{c}\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\Big\}\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} + \delta)$$

ahol κ a kioltási együttható.

Csillapodás nő a frekvenciával, ezért a kisebb frekvenciájú hullámok mélyebbre hatolnak (behatolási mélység).

A térerősségek nem egyidőben oszcillálnak (szemben a szigetelők esetével), hanem

$$\delta = \arctan\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$

fáziskéséssel. Jó vezetők, azaz $\sigma \gg 1$ esetén $\kappa \approx \infty$, így a fáziskésés $\delta = {}^{\pi}/_{4}$.

A mágneses és az elektromos energiasűrűség általában nem egyenlő, az egy periódusra vett átlaguk aránya

$$\frac{\overline{\mathfrak{u}}_m}{\overline{\mathfrak{u}}_e} = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}$$

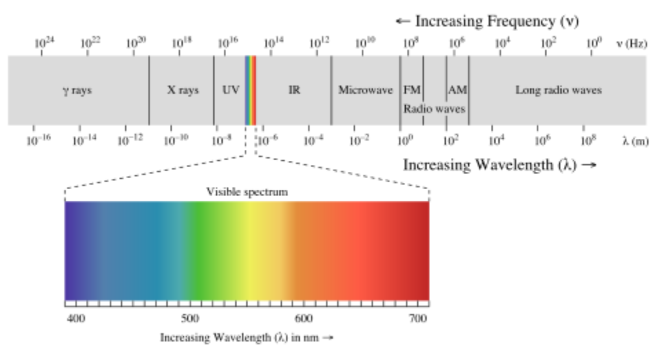
Míg szigetelőkre a két energiasűrűség megegyezik, addig jó vezetőkre a mágneses járulék a meghatározó!

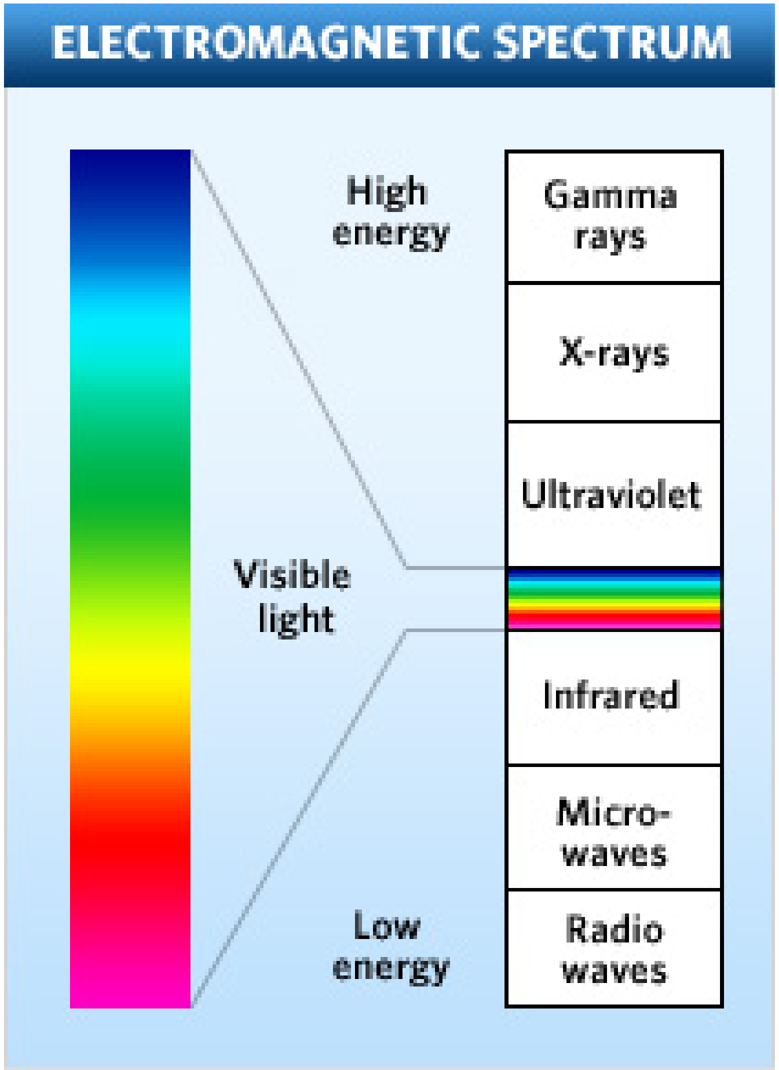
4. Elektromágneses fényelmélet

terjedési sebesség	vákuumban	dielektrikumban
elektromágneses hullámok	$c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s	$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
fény	$\approx 3 \cdot 10^8$ m/s	$\frac{c}{n}$

Maxwell megfigyelése: esetek döntő többségében jó közelítéssel $n \approx \sqrt{\varepsilon\mu}$.

A látható fény az elektromágneses sugárzás egy fajtája (egy viszonylag szűk frekvencia/hullámhossz tartományban).




ELECTROMAGNETIC SPECTRUM
High energy
Gamma rays
X-rays
Ultraviolet
Visible light
Infrared
Micro-waves
Radio waves
Low energy

elnevezés		frekvencia	hullámhossz
váltóáram		50 Hz	6000 km
hosszú-	hullámok	3-300 kHz	1-100 km
közép-		300 kHz-3 MHz	100-1000 m
rövid-		3-30 MHz	10-100 m
ultrarövid-		30-300 MHz	1-10 m
mikro-		300 MHz-300 GHz	1-1000 mm
infravörös (IR) sugárzás		$3 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$ Hz	800 nm - 1mm
látható fény		$3,75 - 7,5 \cdot 10^{14}$ Hz	400-800 nm
ultraibolya (UV) sugárzás		$7,5 - 300 \cdot 10^{14}$ Hz	10-400 nm
röntgen	sugarak	$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{20}$ Hz	1-10^4 pm
gamma		$> 10^{20}$ Hz	< 1 pm

Szigetelőkre a kioltási együttható eltűnik, ezért átlátszóak (pl. levegő, üveg), míg vezetőkre igen nagy, így azok átlátszatlanok (visszaverik és/vagy elnyelik az elektromágneses hullámokat). De a konyhasóoldat jó vezető létére átlátszó, míg az ebonit átlátszatlan, bár jó szigetelő!

Magyarázat: a mikroszkopikus töltéshordozók tehetetlensége következtében késleltetett válasz a tér változásaira, ezért a vezetőképesség és a kioltási együttható függ a frekvenciától (diszperzió), melynek következtében különböző frekvenciájú hullámok más-más sebességgel terjednek.

Kramers-Kronig összefüggés: kapcsolat a kioltási együttható és a permittivitás frekvenciafüggése között kauzalitás (okság elve: az ok mindig megelőzi a következményt) következtében.

5. Polarizált hullámok

Monokromatikus síkhullámban a térerősségek a terjedés irányára merőlegesek és periodikusan változnak az időben, ezért bármely rögzített $\vec{\mathbf{r}}$ pontban a végpontjaik egy zárt síkgörbét írnak le az idő előrehaladtával.

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

összefüggés következtében elegendő az elektromos térerősség vizsgálata. Válasszuk a z-tengelyt úgy, hogy az a hullámterjedés irányába mutasson.

$$E_x = A\cos\left(\omega t - kz\right)$$
$$E_y = B\cos\left(\omega t - kz + \delta\right)$$

valamely A, B és δ állandókkal (itt $k = \dfrac{\omega}{\mathbf{v}}$) és $E_z = 0$ (transzverzalitás).

Elemi trigonometriai átalakítások után adódik

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 = 2\cos(\delta)\,\frac{E_x}{A}\,\frac{E_y}{B} + \sin^2(\delta)}$$

Ez egy, az xy-síkban fekvő ellipszis egyenlete!

Fix $\vec{\mathbf{r}}$-re az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ és $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ térerősségek végpontjai egy ellipszis mentén mozognak, az elektromágneses síkhullámok elliptikusan polarizáltak.

Ha a polarizációs ellipszis egy egyenes szakasszá fajul akkor a hullám lineárisan polarizált: ilyenkor

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathcal{E}}\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

valamely, a terjedés irányára merőleges $\vec{\mathcal{E}}$ állandó vektorral (az $\vec{\mathcal{E}}$ irányára merőleges síkot szokás a polarizáció síkjának nevezni).

Ha a polarizációs ellipszis egy körvonal, akkor cirkulárisan polarizált a hullám, és térerőssége

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = A\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{e}}_x \pm A\sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{e}}_y$$

A $\pm$ előjel a hullám helicitása (jobbra vagy balra polarizát).

Bármely cirkulárisan polarizált hullám felbontható két azonos amplitúdójú, merőleges irányokban lineárisan polarizált hullám szuperpozíciójára, melyek fáziskülönbsége $\pm\pi/2$ (előjele a helicitás).

Általában, bármely monokromatikus síkhullám felbontható két, egymásra merőlegesen lineárisan polarizált hullám szuperpozíciójára.

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = A\cos(\omega t - kz + \delta_x)\,\vec{\mathbf{e}}_x + B\cos(\omega t - kz + \delta_y)\,\vec{\mathbf{e}}_y$$

egy, a z-tengely irányában terjedő ω frekvenciájú monokromatikus síkhullám esetén (lineárisan polarizált ha $AB = 0$ vagy $\delta_y - \delta_x$ a π egész számú többszöröse).

Két azonos amplitúdójú, de ellentétes helicitású cirkulárisan polarizált hullám szuperpozíciója lineárisan polarizált, ezért bármely monokromatikus síkhullám előáll két ellentétes helicitású cirkulárisan polarizált hullám szuperpozíciójaként.

Jelentőség: madarak tájékozódása, anyagvizsgálat, fényképészet, stb.

6. Hullámterjedés anizotrop közegben

Anizotrop közegekben (kristályok) $\vec{\mathbf{D}}$ általában nem párhuzamos $\vec{\mathbf{E}}$-vel (oka a molekulák/atomok polarizálhatósága irányfüggő a környezet aszimmetriája/anizotrópiája miatt).

Mindig található három olyan, egymásra merőleges irány (az ún. polarizációs főtengelyek), amelyekkel párhuzamos külső elektromos mező magával párhuzamos polarizációra vezet, ezért mindig megválaszthatók úgy a koordinátatengelyek, hogy teljesüljön

$$D_x = \varepsilon_x E_x \qquad D_y = \varepsilon_y E_y \qquad D_z = \varepsilon_z E_z$$

A permittivitás frekvenciafüggése iránydiszperzióra vezet, mert a főtengelyek változhatnak a frekvenciával.

Gauss–törvény miatt $\vec{\mathbf{D}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ és $\vec{\mathbf{n}}$ kölcsönösen merőlegesek egymásra (transzverzális hullámok), de minden terjedési irányhoz két különböző terjedési sebesség tartozik, vagyis két különböző, más-más fázissebességgel terjedő, egymásra merőleges irányokban polarizált módus (speciális esetekben a két sebesség egybeeshet).

Hullámterjedés $\vec{\mathbf{n}}$ iránya merőleges $\vec{\mathbf{H}}$-ra, de nem $\vec{\mathbf{E}}$-re, ezért a

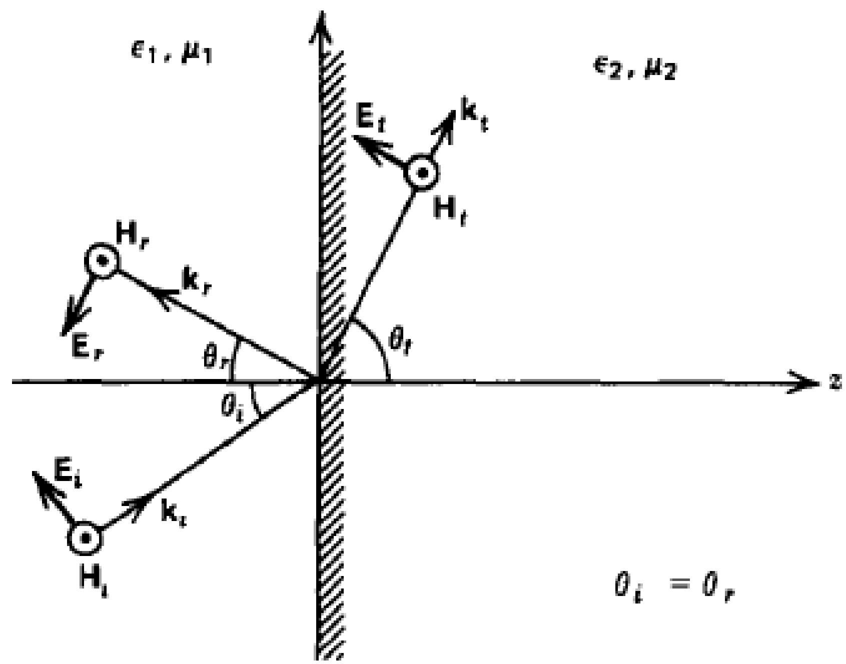
$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}$$

Poynting-vektor (az energia áramsűrűsége) nem párhuzamos $\vec{\mathbf{n}}$-nel:

az elektromágneses energia nem a hullámterjedés irányában áramlik.

7. Elektromágneses síkhullámok visszaverődése és törése közegek határán

Két közeg határán a síkhullám megoldásoknak ki kell elégíteniük az illesztési feltételeket.



Csak a beeső és áthaladó ('tört') hullám nem elégséges, szükség van egy 'visszavert' hullámra is.

Illesztési feltételekből:

1. Mindhárom hullám frekvenciája megegyezik.
2. Mindhárom hullám egy síkban ('beesési sík') terjed.
3. A beesési és visszaverődési szög megegyezik: $\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{r}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}$.
4. Teljesül a

$$\boxed{\frac{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}}{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Snellius–Descartes-törvény

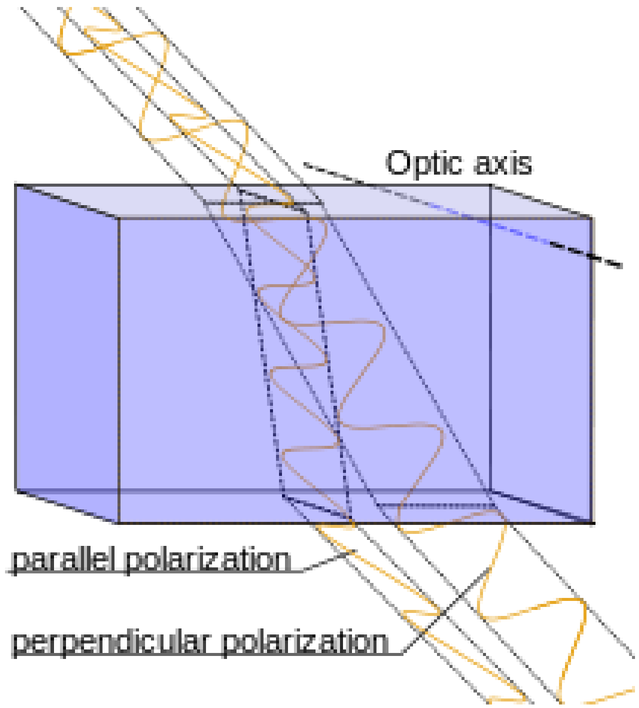
Megjegyzés: mindig van egy visszavert hullám, de $n_2 < n_1$ esetén a tört hullám hiányozhat túl nagy beesési szögeknél: mivel $\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} \leq 1$, ezért fellép a teljes visszaverődés

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{tot}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

határszögnél (gyémántra kb. 24,5°) nagyobb beesési szögeknél.

Permittivitás (törésmutató) frekvenciafüggése $\rightsquigarrow$ különböző hullámhosszú (frekvenciájú) hullámok más-más szögben törnek meg ugyanazon beesési szögnél $\rightsquigarrow$ elektromágneses spektrum felbontása.

Anizotrop közegben az irányfüggő permittivitás miatt a törésmutató is irányfüggő (vagyis függ a tört hullám irányától), így általában két különböző törési szög adódik minden beesési szögre, aminek két különböző tört hullám felel meg, más-más terjedési sebességgel és közel merőleges polarizációs irányokkal (kettős törés).



8. Maxwell-elmélet és relativitás

Elektromágneses hullámok terjedési sebessége vákuumban $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, de mihez képest?

Maxwell: teret kitöltő éter rezgései az elektromágneses hullámok.

Michelson–Morley-kisérlet: a Föld éterhez viszonyított sebességének nagy pontosságú mérése.

Eredmény: a relatív sebesség 0, azaz a Föld együtt mozog az éterrel (ellentmond a csillagászati megfigyeléseknek).

Einstein: semmilyen fizikai hatás sem terjedhet vákuumban a fénynél gyorsabban, azaz c a határsebesség.

Határsebesség léte miatt módosítani szükséges a sebességek összeadási szabályát (összeg sose haladhatja meg c-t)

$$v \uplus w = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}$$

Következmény: fizikai mérések eredménye függ a sebességtől (mozgási mérőszámok), például nagy sebességű ($v \approx c$) mozgás során az idő lassabban telik (iker-paradoxon).

Nagy sebességeknél a klasszikus (Newtoni) mechanika helyét a relativisztikus mechanika veszi át, de a Maxwell-elmélet nem szorul módosításra.