Elektromágneses hullámok I.

Források (töltések és áramok) hiányában a Maxwell-egyenletek alakja

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = 0$$

Nem-triviális megoldások, amelyek energiát és impulzust (meg impulzus-momentumot, stb.) szállítanak: elektromágneses hullámok (létezésüket Maxwell jósolta meg 1864-ben, és Hertz mutatta ki 1888-ban).

Az elektromágneses sugárzás forrásai a gyorsuló töltések.

1. Retardált potenciálok

Vizsgáljuk az elektromágneses mezőt $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$ lineáris anyagi összefüggésekkel jellemzett homogén, izotrop közegben.

A mező jellemezhető a $\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ és $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ potenciálok segítségével:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

A mértékinvariancia következtében mindig kiköthető a

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$ Lorentz–feltétel

a potenciálok között.

Fenti összefüggések és a (skaláris) Laplace-operátor definíciója alapján

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}\Phi &= \mathbf{div}\,(\mathbf{grad}\,\Phi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \\ &= \mathbf{div}\left(\mathbf{grad}\,\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az (elektromos) Gauss-törvényt. Bevezetve a

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

jelölést, átrendezés után a

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

inhomogén hullámegyenlet adódik a skalárpotenciálra.

Hasonló módon, a (vektoriális) Laplace-operátor definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{A}}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{A}}) &= -\frac{\varepsilon\mu}{c}\mathbf{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - \mathbf{rot}(\mu\vec{\mathbf{H}}) \\
&= \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \mu\left\{\frac{4\pi}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right\} \\
&= \cancel{\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \cancel{\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}}
\end{aligned}$$

az Ampère–törvény következtében, ami átrendezés után a

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

(inhomogén) vektoriális hullámegyenletet adja a vektorpotenciálra.

Inhomogén hullámegyenlet egy partikuláris megoldását adják a

$$\Phi(\vec{\mathbf{R}},t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho\left(\vec{\mathbf{r}}, t - \frac{1}{\mathrm{v}}\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{R}}\right|\right)}{\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{R}}\right|}\,\mathrm{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{R}},t) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec{\mathfrak{J}}\left(\vec{\mathbf{r}}, t - \frac{1}{\mathrm{v}}\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{R}}\right|\right)}{\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{R}}\right|}\,\mathrm{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

retardált potenciálok, ahol a potenciálok valamely $\vec{\mathbf{R}}$ pontbeli értékét a t időpontban a források más helyeken, a távolsággal arányosan korábbi időpontokban felvett értékei határozzák meg, ezért a forrásokban beálló változás a potenciálok értékét d távolságra csak $\frac{d}{\mathrm{v}}$ késleltetéssel befolyásolja: az elektromágneses hatások véges v sebességgel terjednek!

Megjegyzés: a forrásmentes Maxwell-egyenletek

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

következtében

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}$$

és

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

vagyis a térerősségek is kielégítik a (homogén) hullámegyenletet.

2. Hullámterjedés

Egy hely- és időfüggő $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ fizikai mennyiség hullámszerűen terjed, amennyiben a forrásoktól távol kielégíti a

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\mathcal{A} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial t^2} = 0}$$

homogén hullámegyenletet, ahol v egy sebesség dimenziójú paraméter.

Megjegyzés: a hullámok kisugárzását és elnyelését a

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{A} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial t^2} = \mathcal{B}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

inhomogén hullámegyenlet írja le: itt $\mathcal{B}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ a hullámforrás jellemzője.

Példák: hanghullámok, nehézségi hullámok, szeizmikus hullámok, rádióhullámok, gravitációs hullámok, fényhullámok, stb.

Descartes-koordinátákban a homogén hullámegyenlet alakja

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = 0$$

függetlenül attól, hogy $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ egy skalármennyiség, avagy egy vektormennyiség valamely Descartes-komponense.

Hullámfront: olyan összefüggő felület, amely mentén egy adott időpillanatban az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ adott konstans (pl. maximális) értéket vesz fel.

Megjegyzés: idő múlásával a hullámfrontok alakja és helyzete változhat.

Néhány gyakori hullámtípus:

1. Síkhullámok esetén a hullámfrontok egymással párhuzamos síkok, amelyek v sebességgel haladnak egyenletesen közös normálisuk irányába, következésképp létezik egy olyan $\mathscr{A}$ egyváltozós függvény, hogy

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathscr{A}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

ahol $\vec{\mathbf{n}}$ jelöli a hullámfrontok közös normálisának egységvektorát.

2. Hengerhullám esetén a hullámfrontok v sebességgel táguló koaxiális (közös tengelyű) hengerfelületek, ezért

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathscr{A}(\mathrm{v}t - \rho)$$

valamely $\mathscr{A}$ egyváltozós függvényre, ha ρ a tengelytől mért távolság.

3. Gömbhullám esetén a hullámfrontok (v sebességgel) egyenletesen tágulό, koncentrikus gömbfelületek, ezért az $\vec{\mathbf{r}}_0$ centrumtól mért $|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|$ távolság és $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)$ szorzata csak a $\mathrm{v}t-|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|$ kombinációtól függ, így

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|}\mathscr{A}(\mathrm{v}t-|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0|)$$

valamely egyváltozós $\mathscr{A}$ függvényre: $\mathrm{v}>0$ esetén ki-, ellenkező esetben pedig befutó gömbhullámról beszélünk.

Megjegyzés: mind a három fenti hullámtípus automatikusan kielégíti a homogén hullámegyenletet.

Ha olyan gömbhullámot tekintünk, amelynek $\vec{\mathbf{r}}_0$ centruma nagyon messze van az origótól, azaz $|\vec{\mathbf{r}}| \ll |\vec{\mathbf{r}}_0|$, akkor alkalmazhatjuk az

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0| = \sqrt{\vec{\mathbf{r}}_0^{\,2} + \vec{\mathbf{r}}^{\,2} - 2\vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\mathbf{r}}} \approx |\vec{\mathbf{r}}_0| + \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$$

közelítést, ahol

$$\vec{\mathbf{n}} = -\frac{\vec{\mathbf{r}}_0}{|\vec{\mathbf{r}}_0|}$$

a centrumból az origó irányába mutató egységvektor, így

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0|} \mathscr{A}(\mathrm{v}t - |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0|) \approx \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_0|} \mathscr{A}\big(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - |\vec{\mathbf{r}}_0|\big)$$

Centrumától elég nagy távolságra minden gömbhullám jól közelíthető síkhullámmal!

A hullámegyenlet egy másodrendű, lineáris parciális differenciálegyenlet, ezért megoldásainak – mint pl. a sík- és gömbhullámok – bármely szuperpozíciója is megoldás.

Fordítva, a hullámegyenlet bármely megoldása előállítható akár gömb-, akár síkhullámok szuperpozíciójaként, ezért elegendő ezen típusok részletes vizsgálata.

Huygens-Fresnel–elv: tetszőleges hullám előáll – bármely, a hullámforrást teljes egészében a belsejében foglaló zárt felületen kívül – mint a felület egyes pontjaiból, mint centrumból kiinduló koherens gömbhullámok, az ún. 'másodlagos hullámok' szuperpozíciója.

Monokromatikus síkhullám: olyan síkhullám, amelyben a hullámzó mennyiség időfüggése szinuszos, azaz

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{A}_0 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

ahol ω a frekvencia, $\mathcal{A}_0$ az amplitúdó, míg

$$\vec{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{\mathrm{v}} \vec{\mathbf{n}}$$

a (reciprok hossz dimenziójú) hullámszám-vektor.

Periodikus időfejlődés $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidővel.

Megjegyzés: két hullámfront távolságát a (hosszúság dimenziójú)

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{\mathbf{k}}|} = \frac{2\pi \mathrm{v}}{\omega}$$

hullámhossz adja meg.

A hullámegyenlet linearitása és az $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Euler-képlet következményeként egy monokromatikus síkhullám leírható a

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathsf{Re}\left\{\mathcal{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}\right\}$$

komplex exponenciális jelöléssel, vagyis a hullámszerűen terjedő $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ mennyiséget egy komplex exponenciális kifejezés valós részeként állítjuk elő (az $\mathcal{A}_0$ amplitúdó lehet komplex értékű).

A komplex exponenciális jelölés előnye, hogy exponenciális függvények szorzása, deriválása és integrálása sokkal egyszerűbb, mint a trigonometrikus függvényeké.

Fourier-dekompozíció: bármely síkhullám felbontható monokromatikus síkhullámok összegére (spektrális felbontás),

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\int \mathcal{A}_0(\omega)\, e^{i(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Hasonló elgondolásból, mivel tetszőleges hullám felbontható különböző irányokba terjedő síkhullámok összegére, ezért általában

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}},t)=\int \mathcal{A}_0\left(\vec{\mathbf{k}}\right)\, e^{i(\omega t-\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{\mathbf{k}}}{2\pi}$$

ahol figyelembe kell venni a hullámszámvektor és a frekvencia közötti

$$\omega=\mathrm{v}\left|\vec{\mathbf{k}}\right|$$

diszperziós összefüggést.

3. Elektromágneses síkhullámok terjedése

Források hiányában ($\rho=0$ és $\vec{\mathbf{J}}=\vec{\mathbf{0}}$), a Maxwell–egyenletek egy homogén, izotrop, lineáris anyagi összefüggésekkel jellemzett szigetelőben

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0 \qquad\qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \qquad\qquad \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

ezért

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}})}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}$$

és

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}})}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

Mivel $\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{H}}$ kielégítik a hullámegyenletet, ezért létezhetnek

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{H}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

alakú elektromágneses síkhullám megoldások, ahol

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

és az $\vec{\mathcal{E}}$, ill. $\vec{\mathcal{H}}$ amplitúdóvektorok egy valós változó megfelelő függvényei.

A hullámegyenlet következménye a Maxwell–egyenleteknek, ezért azoknál kevésbé megszorító, így nem minden síkhullám megoldás elégíti ki feltétlenűl a Maxwell–egyenleteket.

Milyen további feltételek fennállása esetén teljesülnek a Maxwell–egyenletek?

Az összetett függvények deriválására vonatkozó láncszabály alapján

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \frac{\partial(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{\partial x} = -n_x \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \frac{\partial\left(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)}{\partial t} = \mathrm{v}\mathcal{E}_x'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

vesszővel jelölve egy egyváltozós függvény közönséges deriváltját, ezért

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -n_x\mathcal{E}_x' - n_y\mathcal{E}_y' - n_z\mathcal{E}_z' =$$
$$= -\left(n_x\mathcal{E}_x + n_y\mathcal{E}_y + n_z\mathcal{E}_z\right)' = -\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

és

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \mathrm{v}\vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

Hasonló meggondolásból

$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -n_y \mathcal{E}_z' + n_z \mathcal{E}_y' = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_x$$
$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -n_z \mathcal{E}_x' + n_x \mathcal{E}_z' = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_y$$
$$\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -n_x \mathcal{E}_y' + n_y \mathcal{E}_x' = -\left(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'\right)_z$$

ahonnan

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

és ugyanilyen kifejezéseket kapunk $\vec{\mathbf{H}}$-ra, ha az $\vec{\mathcal{E}}$-t kicseréljük $\vec{\mathcal{H}}$-ra:

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = -\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = -\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

Fenti kifejezéseket a

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Ampère–törvénybe behelyettesítve

$$-\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\varepsilon \mathrm{v}}{c}\vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

ahonnan a $\xi = \frac{\varepsilon \mathrm{v}}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\xi\vec{\mathcal{E}}'(x) + \vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}'(x) = \vec{0}$$

Mivel mind ξ, mind az $\vec{\mathbf{n}}$ egységvektor konstans, ezért

$$\vec{\mathcal{C}}(x) = \xi\vec{\mathcal{E}}(x) + \vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}(x)$$

az argumentumától független vektormennyiség.

$\vec{\mathcal{C}}(x)$ független az argumentumától, és lineárisan függ az $\vec{\mathcal{E}}(x)$ elektromos amplitúdó-vektortól, ezért úgy értelmezendő, mint egy időfüggetlen statikus háttér, amely nem vesz részt a hullámterjedésben, így nem kell figyelembe venni: $\vec{\mathcal{C}}=\vec{\mathbf{0}}$ megkövetelésével adódik, hogy

$$\vec{\mathcal{E}}(x) = -\xi^{-1}\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{H}}(x)$$

ahonnan $x=\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$ behelyettesítéssel

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\xi^{-1}\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)}$$

Következmény: $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ merőleges mind a terjedés $\vec{\mathbf{n}}$ irányára, mind a $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ mágneses térerősségre, és

$$\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|=\xi\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$$

Hasonló meggondolásból, a

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}$$

Faraday–törvényt felhasználva

$$-\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{E}}'(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = -\xi^{-1}\vec{\mathcal{H}}'(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

vagyis a statikus tagok újbóli elhagyásával

$$\vec{\mathcal{H}}\,(x) = \xi\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathcal{E}}(x)$$

így végül

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \xi\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)}$$

Következmény: $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ merőleges nem csak $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$-re, de $\vec{\mathbf{n}}$-re is.

Megjegyzés: a két skaláris Maxwell-egyenlet automatikusan teljesül.

1. Mind az elektromos, mind a mágneses térerősség merőleges a hullámterjedés irányára: transzverzális hullámok!

2. A térerősségek egymásra is merőlegesek, és $\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \xi\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$, ezért a Poynting-vektor (energiaáram-sűrűség)

$$\vec{\mathbf{S}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{c}{4\pi}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}} = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{\mathbf{E}}\right|\left|\vec{\mathbf{H}}\right|\vec{\mathbf{n}} = \frac{c\xi}{4\pi}\left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2\vec{\mathbf{n}} = \mathrm{v}\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t)\,\vec{\mathbf{n}}$$

ahol

$$\mathfrak{u}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{D}}+\vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{8\pi}$$

a hullám energiasűrűsége, vagyis az energia v sebességgel terjed a hullámterjedés irányában!

3. $\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \xi\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$ miatt $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2 = \xi^2\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$, ezért a hullám energiasűrűségében az

$$u_e(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\varepsilon}{8\pi}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$$

elektromos és

$$u_m(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu}{8\pi}\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)^2$$

mágneses járulékok!

4. Ugyancsak $\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \xi\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$ következtében, az elektromos és a mágneses térerősség egymással szinkronban oszcillál, egyszerre veszik fel maximális értéküket.

Monokromatikus síkhullám esetén

$$\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$
$$\vec{\mathbf{H}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$

ahol $\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{E}}_0 = 0$ (tranzverzalitás miatt) és $\vec{\mathbf{H}}_0 = \frac{c}{\mu\omega}\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}}_0$ a fentiek alapján.

Mivel egy síkhullámban az energiaáram nagysága változik az idővel, ezért a hullám $\mathcal{I}$ intenzitása az energiaáram egy peridusra átlagolt értéke.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\vec{\mathbf{S}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{vu}(\vec{\mathbf{r}},t)\,dt = \frac{c}{4\pi T}\xi\int_0^T \left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|^2 dt$$
$$= \frac{c}{4\pi}\xi\left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|^2 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})dt = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|^2$$

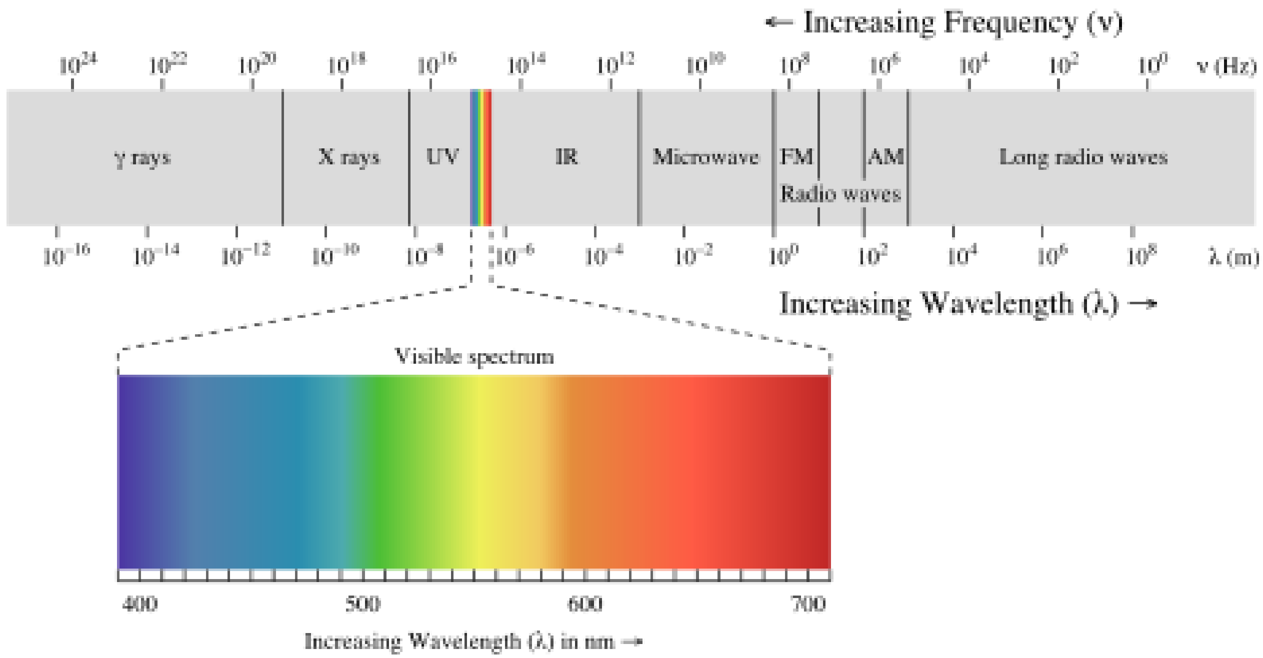
4. Elektromágneses fényelmélet

terjedési sebesség	vákuumban	dielektrikumban
elektromágneses hullámok	$c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$	$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
fény	$\approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$	$\frac{c}{n}$

ahol n a dielektrikum (abszolút) törésmutatója.

Mérési adatok alapján jó közelítéssel $n \approx \sqrt{\varepsilon\mu}$ sok különféle anyagra.

Fenti megfigyelésre támaszkodva Maxwell feltételezte, hogy a fényt olyan elektromágneses hullámok alkotják, amelyek frekvenciája a teljes elektromágneses spektrum egy szűk sávjába esik (elektromágneses fényelmélet).



Megjegyzés: $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ összefüggéstől való eltérés oka az anyagi jellemzők frekvenciafüggése, azaz a diszperzió, amely végső soron a mikroszkopikus dipólusok és töltéshordozók tehetetlenségére vezethető vissza.

elnevezés		frekvencia	hullámhossz
váltóáram		50 Hz	6000 km
hosszú-	hullámok	3-300 kHz	1-100 km
közép-		300 kHz-3 MHz	100-1000 m
rövid-		3-30 MHz	10-100 m
ultrarövid-		30-300 MHz	1-10 m
mikro-		300 MHz-300 GHz	1-1000 mm
infravörös (IR) sugárzás		$3 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$ Hz	800 nm - 1mm
látható fény		$3,75 - 7,5 \cdot 10^{14}$ Hz	400-800 nm
ultraibolya (UV) sugárzás		$7,5 - 300 \cdot 10^{14}$ Hz	10-400 nm
röntgen	sugarak	$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{20}$ Hz	1-10^4 pm
gamma		$> 10^{20}$ Hz	< 1 pm

5. Hullámterjedés vezetőkben

Tekintsünk egy homogén és izotrop, σ vezetőképességű közegben terjedő

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$

monokromatikus síkhullámot. Egyszerű számolással

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = i\omega\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$
$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{k}}^2\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

és hasonló kifejezések adódnak a $\vec{\mathbf{H}}$ mágneses térerősségre is.

Mivel a konduktív áramsűrűség $\vec{\mathbf{J}}_{\mathtt{kond}} = \sigma\vec{\mathbf{E}}$ az általánosított Ohm-törvény szerint, ezért a Maxwell–egyenletek alakja

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$ következtében $\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = 0$, vagyis az elektromos és mágneses térerősségek ez esetben is merőlegesek a terjedés irányát kijelölő $\vec{\mathbf{k}}$ hullámszám-vektorra, vagyis újfent transzverzális hullámokkal van dolgunk.

A Faraday–törvény szerint

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{i\omega}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}=-\frac{c}{i\mu\omega}\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}=\frac{c}{\mu\omega}\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

ezért $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ és $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ merőleges egymásra is, és

$$\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|=\frac{c\left|\vec{\mathbf{k}}\right|}{\mu\omega}\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$$

míg az Ampère–törvény következtében

$$-i\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}}=\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{\mathbf{E}}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}=\frac{i\omega\hat{\varepsilon}}{c}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

és ezért

$$\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|=\frac{c\left|\vec{\mathbf{k}}\right|}{\hat{\varepsilon}\omega}\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$$

Itt

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

a közeg komplex dielektromos állandója.

A komplex dielektromos állandó egy matematikai segédmennyiség, amely lehetővé teszi a közeg vezetőképességének egyszerű figyelembevételét. Vegyük észre, hogy nem szimplán egy komplex értékű anyagi jellemzőről van szó, de emellett $\hat{\varepsilon}$ képzetes része explicit módon függ a frekvenciától!

Megjegyzés: teljes általánosságban, egy fizikai rendszernek külső hatásokra adott válaszát leíró általánosított szuszceptibilitások képzetes része a disszipatív folyamatokat jellemzi.

$$\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \frac{c\left|\vec{\mathbf{k}}\right|}{\mu\omega}\left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| \quad \text{és} \quad \left|\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right| = \frac{c\left|\vec{\mathbf{k}}\right|}{\hat{\varepsilon}\omega}\left|\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right|$$

következtében

$$\left|\vec{\mathbf{k}}\right|^2 = \frac{\hat{\varepsilon}\mu\omega^2}{c^2}$$

és

$$\vec{\mathbf{k}} = \frac{\omega\sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}}{c}\vec{\mathbf{n}}$$

ezért a hullámszám-vektor képzetes része nem zérus, de $\vec{\mathbf{k}}$ mindig felbontható valós és képzetes részekre:

$$\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{K}} - i\frac{\omega\kappa}{c}\vec{\mathbf{n}}$$

ahol $\vec{\mathbf{K}}$ a valós hullámszám-vektor és κ a kioltási együttható.

A térerősségek

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\{-\frac{\omega\kappa}{c}\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\}e^{i(\omega t-\vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{H}}_0 \exp\{-\frac{\omega\kappa}{c}\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\}e^{i(\omega t-\vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$

vagyis az amplitúdó exponenciálisan csökken $\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$ növekedésével.

Magyarázat: a hullám elektromos mezeje által gerjesztett konduktív áramok Joule-hőt termelve disszipálják a hullám energiáját, ezáltal csökkentve a térerősségeket.

Mivel a csillapodás arányos a frekvenciával és a kioltási együtthatóval, ezért a kisebb frekvenciájú hullámok mélyebbre hatolnak a vezető közegbe: a behatolási mélység $\dfrac{c}{\omega\kappa}$.

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu}}\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

és $\hat{\varepsilon}$ komplex volta következtében az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ és $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ térerősségek már nem szinkronban oszcillálnak (szemben a szigetelők esetével), hanem

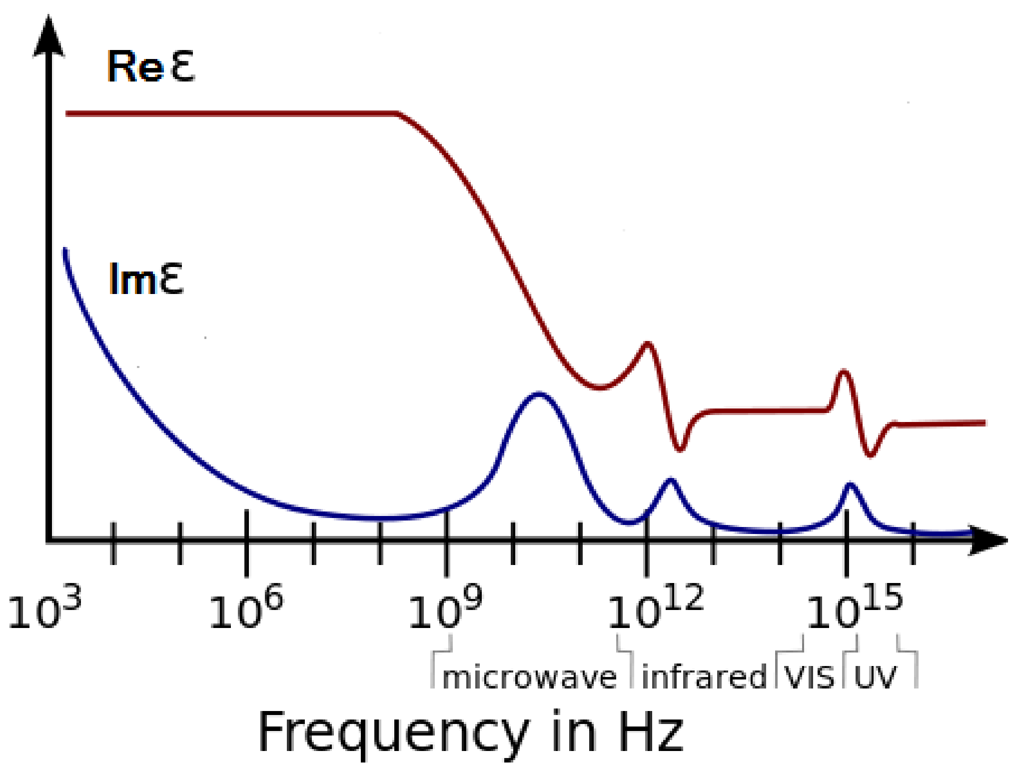
$$\delta = \arctan\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$

fáziskéséssel, továbbá az energiasűrűség mágneses és elektromos járuléka általában nem egyenlő, az egy periódusra vett átlaguk aránya

$$\frac{\overline{\mathfrak{u}}_m}{\overline{\mathfrak{u}}_e} = \sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}$$

Szigetelőkre $\delta=0$ és $\overline{\mathfrak{u}}_m=\overline{\mathfrak{u}}_e$, míg jó vezetők estén $\delta={}^{\pi}/_{4}$, és a mágneses járulék a meghatározó az energiasűrűségben!

A mikroszkopikus töltéshordozók tehetetlensége miatt késleltetett válasz lép fel a tér gyors változásaira, ezért a komplex dielektromos állandó bonyolult módon függ a frekvenciától.



Ez magyarázza, hogy míg szigetelőkre – pl. levegő, üveg – a kioltási együttható eltűnik, ezért általában átlátszóak, viszont vezetőkre – pl. fémek – igen nagy, így azok átlátszatlanok (visszaverik és/vagy elnyelik az elektromágneses hullámokat), de például a konyhasóoldat jó vezető létére mégis átlátszó, míg az ebonit átlátszatlan (bár jó szigetelő), mert magas frekvenciákon más az együtthatójuk, mint alacsony frekvencián!

Megjegyzés: az oksági elv következtében a komplex dielektromos állandó valós és képzetes részének frekvenciafüggése nem független egymástól, összekötik őket a Kramers-Kronig relációk.

$\hat{\varepsilon}$ frekvenciafüggése miatt a különböző frekvenciájú monokromatikus hullámok más-más sebességgel terjednek (diszperzió).