Elektromágneses hullámok II.

1. Polarizált hullámok

Mivel egy elektromágneses síkhullámban az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ és $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ térerősségek a terjedés irányára mindvégig merőlegesek, ezért bármely rögzített helyen a végpontjaik egy síkgörbét írnak le az idő előrehaladtával.

Megjegyzés: a síkhullámokban érvényes

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{\mathbf{n}}\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

összefüggés következtében elegendő az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ vektort vizsgálni.

Monokromatikus síkhullámban

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathsf{Re}\left\{\vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}\right\}$$

ahol $\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{E}}_0 = 0$ és $\omega = \mathsf{v}\left|\vec{\mathbf{k}}\right|$. Ha a z-tengelyt úgy választjuk, hogy az a hullámterjedés irányába mutasson, akkor $\vec{\mathbf{k}} = k\vec{\mathbf{e}}_z$ és

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = Ae^{i\delta_x}\vec{\mathbf{e}}_x + Be^{i\delta_y}\vec{\mathbf{e}}_y$$

valamely valós A, B és δ_x, δ_y állandókkal (mivel $\vec{\mathbf{E}}_0$ merőleges $\vec{\mathbf{k}}$-ra). Bevezetve az $\alpha = \omega t - kz + \delta_x$ és $\beta = \delta_y - \delta_x$ jelöléseket

$$\begin{aligned}
E_x &= A\cos\left(\omega t - kz + \delta_x\right) = A\cos\alpha \\
E_y &= B\cos\left(\omega t - kz + \delta_y\right) = B\cos(\alpha+\beta) \\
E_z &= 0
\end{aligned}$$

Innen, a $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ azonosság felhasználásával

$$\begin{aligned}
\left(\frac{E_x}{A}\right)^2+\left(\frac{E_y}{B}\right)^2 &= \cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)= \\
&= \cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\
&= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\
&= \sin^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) \\
&= \sin^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\
&= \sin^2(\delta_y-\delta_x)+2\cos(\delta_y-\delta_x)\,\frac{E_x}{A}\frac{E_y}{B}
\end{aligned}$$

vagyis

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{A}\right)^2+\left(\frac{E_y}{B}\right)^2=2\cos(\delta_y-\delta_x)\,\frac{E_x}{A}\frac{E_y}{B}+\sin^2(\delta_y-\delta_x)}$$

ami egy, az xy-síkban fekvő ellipszis egyenlete!

Fix $\vec{\mathbf{r}}$-re az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ és $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ térerősségek végpontjai egy ellipszis mentén mozognak az idő múlásával, más szóval a monokromatikus síkhullámok elliptikusan polarizáltak.

Mivel egy ellipszist kétféleképpen is bejárhatunk – az óramutató járásával ellentétesen, vagy azzal megegyezően –, ezért két különböző helicitás (jobb-, illetve balkezes hullámok) fordulhat elő.

Megjegyzés: nem monokromatikus síkhullámok esetén a térerősségek végpontjai által leírt görbe általában nem zárt (mivel az időfejlődés nem periodikus), kivéve ha a Fourier-felbontásban szereplő minden frekvencia egy adott alapfrekvencia egész számú többszöröse ('felharmonikusa').

Ha a polarizációs ellipszis kistengelye nulla hosszóságú, akkor az ellipszis egyenes szakasszá fajul el, és lineárisan polarizált hullámok adódnak: z-tengely irányú hullámterjedés esetén az elektromos térerősség

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - kz + \delta)$$

ahol (valós) $\vec{\mathbf{E}}_0$ amplitúdó merőleges a terjedés irányára.

A polarizáció síkja az $\vec{\mathbf{E}}_0$-ra merőleges sík (az eredeti definíció szerint, de manapság az $\vec{\mathbf{E}}_0$ és a terjedés iránya által kifeszített síkot hívják így).

Bármely monokromatikus síkhullám felbontható két, egymásra merőleges irányokban lineárisan polarizált hullám szuperpozíciójára.

Egy elektromágneses síkhullám cirkulárisan polarizált, ha a polarizációs ellipszis egy körvonal (a kis- és nagytengelye azonos hosszú): ilyenkor az elektromos térerősség (z-tengely irányú hullámterjedés esetén)

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = A\cos(\omega t - kz + \delta)\,\vec{\mathbf{e}}_x \pm A\sin(\omega t - kz + \delta)\,\vec{\mathbf{e}}_y$$

ahol a $\pm$ előjel a hullám helicitása (jobb- vagy balkezessége).

Egy cirkulárisan polarizált hullám felbontható két azonos amplitúdójú, egymásra merőleges irányokban lineárisan polarizált hullám szuperpozíciójára, melyek fáziskülönbsége $\pm\pi/2$ (az előjel a helicitás).

> Bármely monokromatikus síkhullám előáll két ellentétes helicitású cirkulárisan polarizált hullám szuperpozíciójaként.

Optikai aktivitás: a polarizációs sík elfordul a hullámterjedés során a közegben megtett úttal és a frekvencia négyzetével arányos, de a polarizáció irányától független szöggel.

Optikai aktivitás oka a tükrözési (jobb/bal) szimmetria sérülése, amelyet kiválthat a közeg strukturális sajátossága (a kristály- vagy molekulaszerkezet geometriája), vagy pedig egy külső hatás, például mágneses mező jelenléte (Faraday-effektus).

Természetben általában nem észlelhető, mivel a jobbra és balra forgató molekulák azonos arányban fordulnak elő, kivéve egyes speciális körülményeket, mint pl. a biológiai aktivitás, amikor csak az egyik irányba forgató molekulák vesznek részt az élőlények anyagcseréjében.

2. Hullámterjedés anizotrop közegben

Anizotrop közegekben (pl. kristályok) a különböző térbeli irányok nem egyenértékűek egymással, ezért a dielektromos állandó és a mágneses permeabilitás nem skalár-, hanem tenzormennyiség, és a $\vec{\mathbf{D}}$ eltolási vektor általában nem párhuzamos $\vec{\mathbf{E}}$-vel, mivel a molekulák polarizálhatósága irányfüggő a környezet aszimmetriája és/vagy anizotrópiája miatt.

Polarizációs főtengelyek: olyan irányok, amelyekkel párhuzamos elektromos mező azonos irányú polarizációt okoz.

Megjegyzés: minden esetben van három, egymásra merőleges polarizációs főtengely, de választásuk nem mindig egyértelmű.

Olyan Descartes-koordinátákat választva, melyek tengelyei a polarizációs főtengelyek irányába mutatnak, a lineáris anyagi összefüggés alakja

$$D_x = \varepsilon_x E_x \qquad D_y = \varepsilon_y E_y \qquad D_z = \varepsilon_z E_z$$

ahol általában $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ (izotrop esetben egyenlőek).

Iránydiszperzió: nem csak a permittivitás nagysága, de a polarizációs főtengelyek iránya is változik a frekvenciával.

Nem-mágneses közegben $\mu \approx 1$ (azaz $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}}$) és

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \qquad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$$

$\vec{\mathbf{n}}$ egységvektor irányában v sebességgel terjedő

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$
$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathcal{H}}(\mathrm{v}t - \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

síkhullám megoldásokra (a statikus járulék elhanyagolásával)

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\frac{c}{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

a gerjesztési törvény következtében, ezért $\vec{\mathbf{D}}$ merőleges $\vec{\mathbf{H}}$-ra és a terjedés irányára, de ez $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$-re általában már nem igaz.

A $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{H}} = 0$ mágneses Gauss–törvény miatt $\vec{\mathbf{H}}$ merőleges $\vec{\mathbf{n}}$-re, ezért a $\vec{\mathbf{D}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ és $\vec{\mathbf{n}}$ vektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra (transzverzális hullámok).

A Faraday–törvény alapján

$$\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mathrm{v}}{c^2}\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}_x}{\partial t} = -\frac{\mathrm{v}}{c}\left(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}}\right)_x = -\frac{\mathrm{v}}{c}\left\{\frac{1}{\varepsilon_z}\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_y}\frac{\partial D_y}{\partial z}\right\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_z}\frac{\partial(n_x H_y - n_y H_x)}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_y}\frac{\partial(n_z H_x - n_x H_z)}{\partial z}$$

$$= \frac{-n_x n_y}{\varepsilon_z}\mathcal{H}'_y(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) + \frac{n_y^2}{\varepsilon_z}\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

$$+ \frac{n_z^2}{\varepsilon_y}\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) - \frac{n_x n_z}{\varepsilon_y}\mathcal{H}'_z(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

azaz

$$\frac{n_x n_y}{\varepsilon_z}\mathcal{H}'_y(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) + \frac{n_x n_z}{\varepsilon_y}\mathcal{H}'_z(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = \left(\frac{n_y^2}{\varepsilon_z} + \frac{n_z^2}{\varepsilon_y} - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

A többi Descartes-komponensre hasonló módon adódik

$$\frac{n_x n_y}{\varepsilon_z}\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})+\frac{n_y n_z}{\varepsilon_x}\mathcal{H}'_z(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})=\left(\frac{n_x^2}{\varepsilon_z}+\frac{n_z^2}{\varepsilon_x}-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\mathcal{H}'_y(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$
$$\frac{n_x n_z}{\varepsilon_y}\mathcal{H}'_x(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})+\frac{n_y n_z}{\varepsilon_x}\mathcal{H}'_y(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})=\left(\frac{n_x^2}{\varepsilon_y}+\frac{n_y^2}{\varepsilon_x}-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\mathcal{H}'_z(\mathrm{v}t-\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})$$

Ez egy, a hullámterjedés irányától függő lineáris egyenletrendszer a $\vec{\mathcal{H}}'$ vektor Descartes-komponenseire, amelynek csak akkor létezik nem-triviális megoldása, ha az egyenlet determinánsa eltűnik, azaz

$$\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^4-\left(\frac{1-n_x^2}{\varepsilon_x}+\frac{1-n_y^2}{\varepsilon_y}+\frac{1-n_z^2}{\varepsilon_z}\right)\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2+\left(\frac{n_x^2}{\varepsilon_y\varepsilon_z}+\frac{n_y^2}{\varepsilon_x\varepsilon_z}+\frac{n_z^2}{\varepsilon_x\varepsilon_y}\right)=0$$

Egy másodfokú egyenlet adódik v^2-re, aminek általában két, egymástól különböző megoldása van, ezért a különböző irányokhoz két különböző terjedési sebesség tartozik, vagyis két, eltérő sebességű, egymásra merőlegesen polarizált módus terjedhet anizotrop esetben (izotrop esetben a két módus sebessége megegyezik és független az iránytól).

Mivel a hullámterjedés $\vec{\mathbf{n}}$ iránya mindig merőleges $\vec{\mathbf{H}}$-ra, de $\vec{\mathbf{E}}$-re nem szükségszerűen, ezért az energia

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}$$

áramsűrűsége (a Poynting-vektor) általában nem lesz párhuzamos $\vec{\mathbf{n}}$-nel, vagyis ez esetben az elektromágneses energia nem feltétlenül áramlik a hullámterjedés irányával párhuzamosan.

3. Síkhullámok visszaverődése és törése

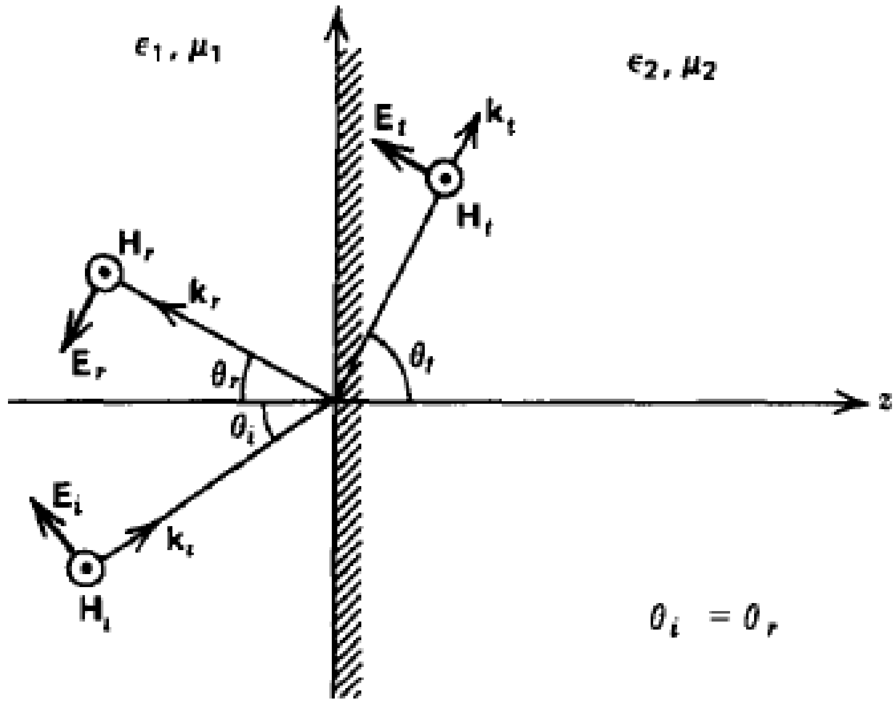
Tegyük fel, hogy a teret két különféle (homogén, izotrop) dielektrikum tölti ki, amelyeket a $z=0$ sík választ el. A $z<0$ félteret kitöltő, ε_1 permittivitású és μ_1 permeabilitású közegben terjedjen egy

$$\vec{\mathbf{E}}^{(\mathtt{i})}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_\mathtt{i} t - \vec{\mathbf{k}}_\mathtt{i}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$
$$\vec{\mathbf{H}}^{(\mathtt{i})}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_\mathtt{i} t - \vec{\mathbf{k}}_\mathtt{i}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$

'beeső' monokromatikus síkhullám, míg a $z>0$ félteret kitöltő, ε_2 permittivitású és μ_2 permeabilitású közegben egy

$$\vec{\mathbf{E}}^{(\mathtt{t})}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_\mathtt{t} t - \vec{\mathbf{k}}_\mathtt{t}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$
$$\vec{\mathbf{H}}^{(\mathtt{t})}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_\mathtt{t} t - \vec{\mathbf{k}}_\mathtt{t}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$

'tört' síkhullám.



A Maxwell-egyenletek következtében

$$\vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathtt{i})} = \frac{c}{\mu_1\omega_1}\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \times \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{i})}$$

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{i})} = 0$$

és

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega_{\mathtt{i}} = c\left|\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\right|$$

illetve

$$\vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathtt{t})} = \frac{c}{\mu_2\omega_2}\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \times \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{t})}$$
$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathtt{t})} = 0$$

és

$$\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\omega_{\mathtt{t}} = c\left|\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}\right|$$

A Maxwell-egyenletek teljesülnek a dielektrikumok belsejében, de figyelembe kell még venni a két közeg határfelületén az illesztési feltételeket!

Mivel nincsenek felületi áramok, ezért a határfelületen a térerősségek tangenciális komponensei folytonosak, ami nem teljesíthető kizárólag a beeső és a tört hullámok figyelembevételével (kivéve egészen speciális eseteket), ezért szükség van egy, a $z<0$ féltérben terjedő

$$\vec{\mathbf{E}}^{(\mathrm{r})}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathrm{r})} e^{i\left(\omega_{\mathrm{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$

$$\vec{\mathbf{H}}^{(\mathrm{r})}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = \vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathrm{r})} e^{i\left(\omega_{\mathrm{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)}$$

'visszavert' hullámra.

Megjegyzés: a visszavert hullámra $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega_{\mathrm{r}} = c\left|\vec{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}}\right|$ és

$$\vec{\mathbf{H}}_0^{(\mathrm{r})} = \frac{c}{\mu_1\omega_{\mathrm{r}}}\vec{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}} \times \vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathrm{r})}$$

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathbf{E}}_0^{(\mathrm{r})} = 0$$

Az illesztési feltételek (tangenciális komponensek folytonosak)

$$E_x^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{i}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} + E_x^{(\mathtt{r})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} = E_x^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{t}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)}$$
$$E_y^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{i}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} + E_y^{(\mathtt{r})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} = E_y^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{t}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)}$$

és

$$H_x^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{i}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} + H_x^{(\mathtt{r})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} = H_x^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{t}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)}$$
$$H_y^{(\mathtt{i})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{i}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} + H_y^{(\mathtt{r})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{r}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)} = H_y^{(\mathtt{t})} e^{i\left(\omega_{\mathtt{t}} t - \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)}$$

bármely, a $z=0$ síkban fekvő $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorra.

Az illesztési feltétel az origóban csak akkor elégíthető ki, ha a három hullám frekvenciája megegyezik: $\omega_{\mathtt{i}} = \omega_{\mathtt{t}} = \omega_{\mathtt{r}}$ (a továbbiakban ω).

$$\boxed{\text{A frekvencia nem változik törésnél és visszaverődésnél!}}$$

Frekvenciák azonossága miatt az illesztési feltételek

$$E_x^{(\mathtt{i})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} + E_x^{(\mathtt{r})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} = E_x^{(\mathtt{t})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}$$
$$E_y^{(\mathtt{i})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} + E_y^{(\mathtt{r})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} = E_y^{(\mathtt{t})} e^{-i\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}$$

az xy-síkban fekvő pontok $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektoraira, aminek csak akkor létezik nem-triviális megoldás, ha az exponenciális tagok megegyeznek, azaz

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\cdot\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}\cdot\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$$

Legyen koordináta-rendszerünk x-tengelye párhuzamos a beeső hullám $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}$ hullámszám-vektorának $z=0$ síkra vett vetületével: ekkor $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_y=0$,

vagyis $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}$ az xz-síkban fekszik. A fentiek alapján $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_y=\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_y=\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_y=0$, vagyis a $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}$, $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}}$ és $\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}}$ hullámszám-vektorok mindegyike egy síkban fekszik, az ún. beesési síkban (jelen választásnál az xz-síkban).

A beeső hullám hullámszám-vektora

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}} = \begin{pmatrix} k_{\mathtt{i}} \sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} \\ 0 \\ -k_{\mathtt{i}} \cos \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} \end{pmatrix}$$

ahol $\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}$ a beeső hullám iránya és a z-tengely által bezárt beesési szög, és

$$k_{\mathtt{i}} = \left|\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{i}}\right| = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\omega}{c}$$

Hasonlóképpen, ha $\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}$, ill. $\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{r}}$ jelöli a törési és a visszaverődési szöget

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{t}} = \begin{pmatrix} k_{\mathtt{t}} \sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} \\ 0 \\ -k_{\mathtt{t}} \cos \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{k}}_{\mathtt{r}} = \begin{pmatrix} k_{\mathtt{r}} \sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{r}} \\ 0 \\ k_{\mathtt{r}} \cos \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{r}} \end{pmatrix}$$

Mivel az $\vec{\mathbf{e}}_x$ vektor a $z=0$ síkban fekszik, így $\vec{\mathbf{k}}_\mathtt{i}\cdot\vec{\mathbf{e}}_x=\vec{\mathbf{k}}_\mathtt{t}\cdot\vec{\mathbf{e}}_x=\vec{\mathbf{k}}_\mathtt{r}\cdot\vec{\mathbf{e}}_x$ és

$$k_\mathtt{i}\sin\boldsymbol{\theta}_\mathtt{i}=k_\mathtt{t}\sin\boldsymbol{\theta}_\mathtt{t}=k_\mathtt{r}\sin\boldsymbol{\theta}_\mathtt{r}$$

míg a $\omega_i=\mathtt{v}_i k_i$ diszperziós relációk és a frekvenciák egyenlősége miatt

$$k_\mathtt{r}=k_\mathtt{i}$$

továbbá

$$\frac{k_\mathtt{t}}{k_\mathtt{i}}=\frac{\mathtt{v}_1}{\mathtt{v}_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{n_2}{n_1}$$

ahol

$$n_i=\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}=\frac{c}{\mathtt{v}_i}$$

az egyes dielektrikumok (abszolút) törésmutatója.

Megjegyzés: nem-mágneses anyagokra $\mu\approx 1$, ezért a törésmutató a jó közelítéssel permittivitás négyzetgyöke: $n=\sqrt{\varepsilon}$.

Következmények:

1. a beesési és visszaverődési szögek megegyeznek

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{r}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}$$

2.

$$\boxed{\frac{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}}{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Snellius–Descartes-törvény

Megjegyzés: mindig van visszavert hullám, de $n_2 < n_1$ esetén, mivel a

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{tot}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

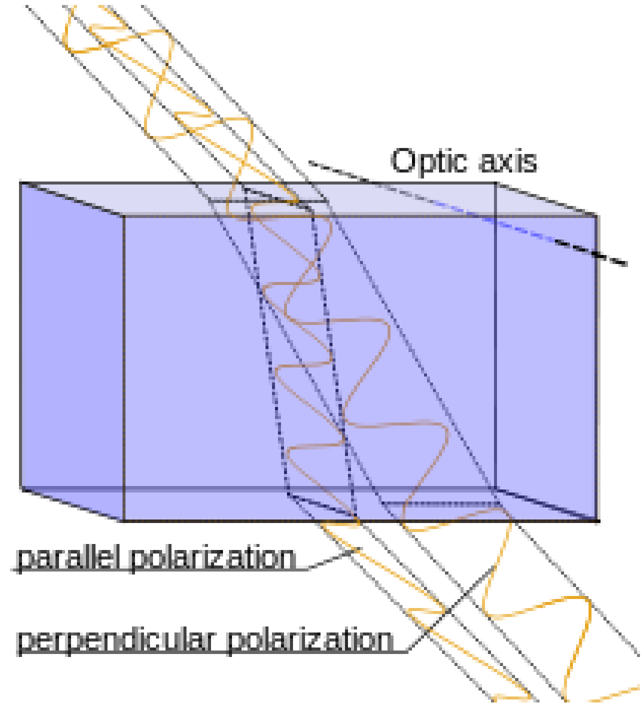
határszögnél (gyémántra kb. 24,5°) nagyobb beesési szögeknél nem teljesülne a $\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} \leq 1$ egyenlőtlenség, ezért túl nagy beesési szögeknél a tört hullám hiányozhat (teljes visszaverődés).

Az anyagi állandók (permittivitás és permeabilitás, illetve a belőlük képzett törésmutató) frekvenciafüggése miatt a különböző frekvenciájú hullámok más-más szögben törnek meg ugyanazon beesési szögnél, ami az elektromágneses spektrum felbontásához vezet (pl a szivárványban).

Anizotrop közegben az irányfüggő permittivitás miatt a törésmutató is irányfüggő (függ a tört hullám irányától), így a

$$\frac{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}}{\sin \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}} = n_{21}(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})$$

Snellius–Descartes-törvény általában két különböző $\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}$ törési szöggel is teljesül, ami miatt két különböző tört hullám jön létre, más-más terjedési sebességgel és közel merőleges polarizációs irányokkal (kettős törés).



Általában két olyan beesési irány van, amelyek esetén nem lép fel kettős törés (biaxiális kristályok), de bizonyos esetekben csak egy ilyen irány létezik (egytengelyű kristályok).

Kerr–effektus: egyes folyadékok és gázok (pl. nitrobenzol) kettős törővé vállnak külső elektromos mezőben (a külső mező megtöri a molekulák forgásszimmetriáját, ezáltal irányfüggő permittivitást okoz).

Rugalmas testekben mechanikai feszültségek hatására is létrejöhet kettős törés (felhasználható a feszültségeloszlás mérésére).

A visszavert és a tört hullám amplitúdójának – és ezáltal intenzitásának – kapcsolatát a beeső hulláméval a Fresnel-formulák adják meg: ha a beeső hullám a beesési síkkal párhuzamosan polarizált akkor

$$E_p^{(\mathtt{r})} = E_p^{(\mathtt{i})} \frac{\tan(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}{\tan(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

$$E_p^{(\mathtt{t})} = E_p^{(\mathtt{i})} \frac{2\cos\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}\sin\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}}{\sin(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})\cos(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

míg merőleges polarizáció esetén (az alsó indexek a polarizációra utalnak)

$$E_m^{(\mathtt{r})} = E_m^{(\mathtt{i})} \frac{\sin(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}})}{\sin(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

$$E_m^{(\mathtt{t})} = E_m^{(\mathtt{i})} \frac{2\cos\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}}\sin\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}}}{\sin(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

A beeső és visszavert hullámok intenzitásainak aránya az

$$R = \frac{\left|E_p^{(\mathtt{r})}\right|^2 + \left|E_m^{(\mathtt{r})}\right|^2}{\left|E_p^{(\mathtt{i})}\right|^2 + \left|E_m^{(\mathtt{i})}\right|^2}$$

visszaverődési együttható, amelynek értéke

$$R_p = \frac{\left|E_p^{(\mathtt{r})}\right|^2}{\left|E_p^{(\mathtt{i})}\right|^2} = \frac{\tan^2(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}{\tan^2(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

párhuzamos, illetve

$$R_m = \frac{\left|E_m^{(\mathtt{r})}\right|^2}{\left|E_m^{(\mathtt{i})}\right|^2} = \frac{\sin^2(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}})}{\sin^2(\boldsymbol{\theta}_{\mathtt{i}} + \boldsymbol{\theta}_{\mathtt{t}})}$$

merőlegesen polarizált hullámokra.

4. Dipólsugárzás

A nyugvó vagy egyenletesen mozgó töltések (stacionárius töltésáramok) keltette elektromos és mágneses mezők időfüggetlenek, ezért az elektromágneses sugárzás forrásai a gyorsuló töltések.

Mivel a sugárzás (elektromágneses) energiát szállít, ezért a gyorsuló töltések kinetikus energiája, és ezáltal sebessége is csökken az idő folyamán ('sugárzási veszteség').

Atomi szinten az elektronok mozgása gyorsuló, így a klasszikus fizika szerint állandó energiaveszteséggel járna, ami ellentmond az atomok stabilitásának.

Vizsgáljunk egy olyan, az origóban nyugvó pontszerű dipólust, amelynek momentuma ω frekvenciájú harmonikus oszcillációkat végez, azaz

$$\vec{\mathbf{p}}(t) = \vec{\mathbf{p}}_0 \cos(\omega t)$$

Az ún. sugárzási zónában, ahol a dipólustól mért $|\vec{\mathbf{r}}|$ távolság sokkal nagyobb, mint a kibocsájtott hullámok

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

hullámhossza, a mágnese térerősség

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\omega^2}{c^2 \, |\vec{\mathbf{r}}|^2} \left(\vec{\mathbf{p}}_0 \times \vec{\mathbf{r}}\right) \cos \omega \Big(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\Big)$$

míg az elektromos térerősség

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\omega^2}{c^2 \, |\vec{\mathbf{r}}|^2} \Big(\vec{\mathbf{p}}_0 - \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}|^2} \left(\vec{\mathbf{p}}_0 \cdot \vec{\mathbf{r}}\right) \vec{\mathbf{r}}\Big) \cos \omega \Big(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\Big)$$

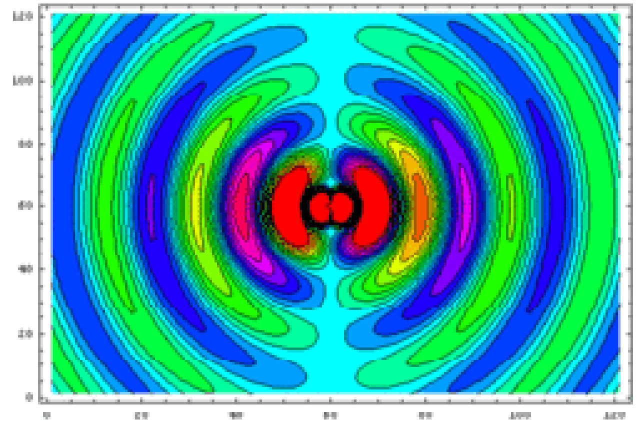
Origóból kifutó monokromatikus gömbhullámok, melyek térerősségei a sugárzási centrumtól mért távolsággal fordítva arányosan csökkennek (elektromos dipólsugárzás).

A Poynting-vektor (az energia áramsűrűsége)

$$\vec{\mathbf{S}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{c}{4\pi}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}} = \frac{\omega^4}{4\pi c^3}\left|\vec{\mathbf{p}}_0\right|^2\frac{\vec{\mathbf{r}}}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|^3}\sin^2\vartheta\cos^2\omega\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right)$$

ahol ϑ jelöli a $\vec{\mathbf{p}}_0$ momentum és a megfigyelési pont $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektora által bezárt szöget: a sugárzási centrumtól mért távolság négyzetével fordítva arányos nagyságú radiális energiaáram.

Megjegyzés: $\vartheta = 0$ esetén a Poynting-vektor zérus, $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{0}}$, más szóval nincs energiaáram a dipólus momentumának irányában.



Az időegység alatt kisugárzott energia, amit a Poynting-vektornak egy (tetszőleges) zárt felületre vett integráljának időátlagaként számolhatunk, a frekvencia negyedik hatványával arányos:

$$\overline{\mathfrak{I}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\int \vec{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} \right) \mathrm{d}t = \frac{\left| \vec{\mathbf{p}}_0 \right|^2}{3c^3} \omega^4$$

Az origóban elhelyezkedő, periodikusan oszcilláló $\vec{\mathbf{m}}(t) = \vec{\mathbf{m}}_0 \exp(i\omega t)$ mágneses momentumra hasonló eredmény adódik: a sugárzási zónában a térerősségek (mágneses dipólsugárzás)

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\omega^2}{c^2 \left|\vec{\mathbf{r}}\right|^2} \left(\vec{\mathbf{m}}_0 - \frac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|^2} \left(\vec{\mathbf{m}}_0 \cdot \vec{\mathbf{r}} \right) \vec{\mathbf{r}} \right) \cos\omega \Big(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c} \Big)$$

és

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\omega^2}{c^2 \left|\vec{\mathbf{r}}\right|^2} \left(\vec{\mathbf{m}}_0 \times \vec{\mathbf{r}} \right) \cos\omega \Big(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c} \Big)$$

míg a kisugárzott energia

$$\overline{\mathfrak{I}} = \frac{\left|\vec{\mathbf{m}}_0\right|^2}{3c^3} \omega^4$$