

Elektrosztatika

1. Bevezetés

Hosszú (**relaxációs időnél** hosszabb) időfejlődés után általában minden zárt fizikai rendszer egyensúlyi állapotba kerül, ahol megszűnik az állapotváltozás.

Elektrosztatika: **nyugvó elektromos töltések által létrehozott elektromos mezők vizsgálata** (nincs mágneses mező).

Nincsenek mozgó töltések és állapotváltozások \rightsquigarrow az áramsűrűség eltűnik, és minden jellemző mennyiség időben állandó.

2. A Coulomb-törvény



Két pontszerű töltés között ható elektromos erő az őket összekötő egyenes mentén hat, és nagysága (mely arányos a töltések nagyságával) fordítva arányos a távolságuk négyzetével

$$|\vec{\mathbf{F}}| \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Észrevétel. Fordított négyzetes távolságfüggés esetleges

$$|\vec{\mathbf{F}}| \propto \frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$$

sértésének jelenlegi kísérleti korlátja $|\varepsilon| < 10^{-15}$.

Coulomb-törvény következtében az $\vec{\mathbf{R}}$ helyvektorú pontba helyezett q nagyságú **ponttöltés elektromos térerőssége** az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú pontban (vákuumban)

$$\vec{\mathbf{E}}(q, \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

Szuperpozíció elve: töltésrendszer által kifejtett erő a rendszert alkotó töltések által kifejtett erők (vektoriális) összegével egyenlő.

$(q_1, \vec{\mathbf{R}}_1), \dots, (q_n, \vec{\mathbf{R}}_n)$ ponttöltésekből álló töltésrendszer elektrosztatikus mezejének térerőssége vákuumban

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{E}}^{(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

Tekintsünk egy $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ térfogati töltéssűrűségű folytonos töltéseloszlást, és osszuk fel a teret \mathcal{V}_i infinitezimálisan kicsiny térrészekre: ezek mindegyikének töltése $q_i = \rho(\vec{\mathbf{R}}_i) |\mathcal{V}_i|$ lesz, ahol $\vec{\mathbf{R}}_i$ jelöli a \mathcal{V}_i térrész valamely

pontjának helyvektorát, ezért járuléka a térerősséghez

$$\vec{\mathbf{E}}(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}}_i) |\mathcal{V}_i| (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

Ezen járulékok felösszegzésével, a felosztást minden határon túl finomítva kapjuk a teljes térerősséget:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \lim \sum_{i=1}^n \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}}_i) |\mathcal{V}_i| (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3} = \int \rho(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

Hasonlóan, egy $\eta(\vec{\mathbf{r}})$ felületi töltéssűrűségű, a Σ felületre lokalizált folytonos töltéseloszlás térerőssége

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\Sigma} \eta(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} |d\vec{\mathbf{s}}|$$

Fentiek alapján pontosan meg tudnánk határozni (elvileg) az elektrosztatikus mező térerősségét bármely pontban, de ehhez **tudnunk kellene a pontos töltéseloszlást az egész Univerzumban** (a kölcsönhatás végtelen hatótávolsága következtében).

Csak csak az Univerzum (nagyon) kicsiny részeiről vannak pontos, méréseken alapuló ismereteink, viszont a térerősséget is csak ezekben a területekben kívánjuk meghatározni.

Kérdés: hogyan tudjuk figyelembe venni a nem ismert tartományokban uralkodó töltéssűrűséget?

Válasz: a fizikai jellemzőknek a vizsgált tartomány határán történő meghatározásával (**holografikus elv**).

3. Az elektrosztatika egyenletei

$\rho(\vec{r})$ térfogati töltéssűrűségű folytonos töltéseloszlás elektrosztatikus mezejének térerőssége (vákumban)

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{r} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

$\rho(\vec{r})$ és $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$ közötti **lokális** összefüggések?

Vektormezők lokális tulajdonságainak jellemzése: **divergencia** (források) és **rotáció** (örvényesség).

Integrál-tételek felhasználásával véges méretekre vonatkozó integrális alak.

3 AZ ELEKTROSZTATIKA EGYENLETEI

$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ vektormező divergenciája (Descartes-koordinátákban)

a

$$\mathbf{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

skalármező.

Divergencia-tétel (Gauss-tétel): vektormező divergenciájának térfogati integrálja egy \mathcal{V} térrészre egyenlő a vektormező felületi integráljával a térrész $\partial\mathcal{V}$ határfelületére.

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div} \vec{v} \, d^3\vec{r} = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}$$

3 AZ ELEKTROSZTATIKA EGYENLETEI

$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ vektormező rotációja (Descartes-koordinátákban)

$$\mathbf{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

vektormező.

Folyadékáramlás esetén a sebességtér örvényességét jellemzi.

Stokes-tétel: vektormező rotációjának felületi integrálja egy \mathcal{F} felületre egyenlő a vektormezőnek a felületet határoló $\partial\mathcal{F}$ görbére vett vonalmenti integráljával.

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

$$\mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

Gauss-törvény

Az elektrosztatikus mező forrásai az elektromos töltések.

Integrális alak (Gauss-tétel felhasználásával)

$$4\pi Q = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{R}}) d^3\vec{\mathbf{R}} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} d^3\vec{\mathbf{R}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

ahol Q a \mathcal{V} térrészben található összes töltés mennyisége, míg $\partial\mathcal{V}$ annak határfelülete.

Gauss-törvény: a térerősség-vektor felületi integrálja egy zárt felületre egyenlő (vákuumban) a felület belsejében található összes töltés 4π -szeresével.

$$\mathbf{rot} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Az elektrosztatikus mező örvénymentes!

Integrális alak (Stokes-tétel felhasználásával)

$$0 = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{rot} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

tetszőleges \mathcal{F} felületre, ahol $\partial\mathcal{F}$ jelöli annak határoló görbét.

Zárt (felületet határoló) γ görbe esetén a

$$W[\gamma] = \int_{\gamma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

vonalintegrál (az egységnyi ponttöltés γ mentén történő mozgatása során végzett munka) zérus.

3 AZ ELEKTROSZTATIKA EGYENLETEI

Ha γ_1 és γ_2 görbék kezdő- és végpontjai megegyeznek, akkor $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ zárt görbe, ezért

$$W[\gamma_1] = W[\gamma_2]$$

Következmény: tetszőleges γ görbe esetén

$$W[\gamma] = \int_{\gamma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

csak a γ végpontjaitól függ.

Az elektrosztatikus mező **konzervatív**: töltések mozgása során az elektrosztatikus mező által végzett munka csak a mozgás kezdő- és végpontjától függ, de független a mozgás során befutott pályától.

4. Az elektrosztatikus potenciál

Egy $\Phi(\vec{r})$ skalármező **gradiense** (Descartes-koordinátákban) a

$$\mathbf{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

vektormező.

Gradiens az adott pontbeli maximális változás irányába mutat, és nagysága a változás sebességét jellemzi (**iránymenti derivált**): elég kicsiny $\vec{\Delta r}$ elmozdulásra

$$\Phi(\vec{r} + \vec{\Delta r}) = \Phi(\vec{r}) + \vec{\Delta r} \cdot \mathbf{grad} \Phi(\vec{r}) + \dots$$

Gradiens-tétel: skalármező gradienseknek egy γ görbére vett vonalmenti integrálja egyenlő a skalármezőnek a görbe γ_+ végpontjában és γ_- kezdőpontjában felvett értékének a különbségével.

$$\int_{\gamma} \mathbf{grad} \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\gamma_+) - \Phi(\gamma_-)$$

Megjegyzés: gradiens-tétel a Newton-Leibnitz-formulát adja vissza ha γ egy egyenes szakasz.

Skalármező gradiense mindig örvénymentes, és minden örvénymentes vektormező előáll egy megfelelő skalármező gradienseként (lokálisan).

$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ következtében létezik egy olyan $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező – az **elektrosztatikus potenciál** – amelyre

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\text{grad } \Phi(\vec{\mathbf{r}})$$

Fizikai interpretáció:

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}_2) - \Phi(\vec{\mathbf{r}}_1) = \int_{\gamma} \text{grad } \Phi(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = - \int_{\gamma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

bármely $\vec{\mathbf{r}}_1$ -et $\vec{\mathbf{r}}_2$ -vel összekötő γ görbére, ahol a jobb oldalon az egységnyi ponttöltés γ mentén történő mozgatása során végzett munka áll.

Potenciálfogalom haszna: **elektrosztatikus mező jellemzése egyetlen skálármezővel** az $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ három (nem független!) komponense helyett.

4 ELEKTROSZTATIKUS POTENCIÁL

Mivel helyfüggetlen skalármező gradiense zérus, ezért

$$\Phi'(\vec{\mathbf{r}}) = \Phi(\vec{\mathbf{r}}) + A$$

(A egy konstans) ugyanazt az elektrosztatikus mezőt írja le mint $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$.

Csak a potenciál-különbségeknek van fizikai értelme, a potenciál maga csak egy additív konstans erejéig meghatározott (**mértékinvariancia**).

Potenciál szokásos normálása (ha lehetséges): $\Phi(\infty) = 0$.

$\vec{\mathbf{R}}$ helyvektorú pontba helyezett q nagyságú **ponttöltés elektrosztatikus potenciálja**

$$\Phi^{(q, \vec{\mathbf{R}})}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|}$$

Szuperpozíció elve: töltésrendszer potenciálja a rendszert alkotó töltések potenciáljainak összege.

$(q_1, \vec{\mathbf{R}}_1), \dots, (q_n, \vec{\mathbf{R}}_n)$ ponttöltések rendszerének potenciálja

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \Phi^{(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|}$$

$\rho(\vec{\mathbf{r}})$ térfogati és $\eta(\vec{\mathbf{r}})$ felületi töltéssűrűségű folytonos töltéseloszlás potenciálja

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} + \int \frac{\eta(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} |d\vec{\mathbf{s}}|$$

5. A Poisson-egyenlet

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \\ \vec{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \Phi \end{array} \right\} \Rightarrow 4\pi\rho = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi)$$

más szóval

$$\boxed{\Delta\Phi = -4\pi\rho}$$

Poisson-egyenlet

ahol (Descartes-koordinátákban)

$$\Delta\Phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

a (skaláris) Laplace-operátor.

Másodrendű parciális differenciálegyenlet a potenciálra.

Poisson-egyenlet lineáris, ezért bármely két megoldás különbsége kielégíti

a $\Delta\Phi = 0$ Laplace-egyenletet.

Poisson-egyenlet **partikuláris megoldása** **infinitezimális ponttöltések szuperpozíciójából**

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

\mathcal{V} tartományon kívüli elektromos töltések hatása **határfeltételek** révén (potenciál viselkedése a határon).

Poisson-egyenletnek **mindig létezik** (normálás erejéig egyértelmű) **megoldása** adott határfeltételek mellett.

Poisson-egyenlet határfeltételeket kielégítő megoldása = partikuláris megoldás + Laplace-egyenlet megfelelő megoldása.

6. Vezetők az elektrosztatikában

Vezető közeg könnyen elmozdítható mikroszkopikus töltéshordozókat tartalmaz makroszkopikus mennyiségben (pl. fémek).

Elektromos mező egy vezető belsejében mozgásba hozná a töltéshordozókat (konduktív töltésáramlás lépne fel), így sztatikus egyensúly csak akkor lehetséges, ha $\vec{E} = \vec{0}$.

Vezetők belsejéből az elektrosztatikus mező kiszorul!

$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ miatt **elektródák** (összefüggő vezető tartományok) **belsejében** a potenciál konstans, az elektródák **ekvipotenciális tartományok**.

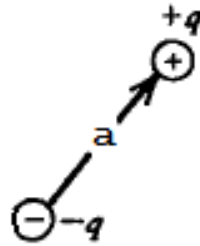
A vezető felületén oly módon halmozódnak fel mikroszkopikus töltéshordozók (indukált felületi töltéssűrűség), hogy annak belsejében – de nem azon kívül! – elektromos mezejük pontosan kioltsa, 'leárnyékolja' a külső elektrosztatikus mezőt.

Poisson-egyenlet megoldásából (az elektródákon kívüli térben) meghatározható az indukált felületi töltéssűrűség.

Vezető elektródák szerepe: határfeltétel a Poisson-egyenlet megoldásánál (potenciál konstans az elektróda belsejében).

7. Pontszerű dipólus elektrosztatikus mezeje

Tekintsük egy, az $\vec{\mathbf{R}}_{\pm}$ helyvektorú pontokban elhelyezett $\pm q$ ponttöltések által alkotott elektromos dipólust.



$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{R}}_{+} - \vec{\mathbf{R}}_{-}$ jelöli a két töltést összekötő vektort, míg $\vec{\mathbf{R}} = (\vec{\mathbf{R}}_{+} + \vec{\mathbf{R}}_{-})/2$ a dipólus töltésközéppontjának helyvektorát.

$$\vec{\mathbf{R}}_{\pm} = \vec{\mathbf{R}} \pm \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} = \frac{q(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \\
 &= \frac{q(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \frac{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)} \\
 &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \frac{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|^2 - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|^2)}{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}
 \end{aligned}$$

Felhasználva a tetszőleges vektorokra érvényes $|\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})$ azonosságot ($\vec{v} = \vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-$ és $\vec{w} = \vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+$ választással)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}) &= \frac{q(2\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_- - \vec{\mathbf{R}}_+) \cdot (\vec{\mathbf{R}}_+ - \vec{\mathbf{R}}_-)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)} \\
 &= \frac{2q(\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}) \cdot \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}
 \end{aligned}$$

Pontszerű dipólus ($|\vec{\mathbf{a}}| \ll |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|$) esetén

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_+| \approx |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_-| \approx |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|$$

ezért legalacsonyabb rendben ($\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{a}}$ a dipólmomentum-vektor)

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

Innen az elektromos térerősség

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{grad} \Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{3(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

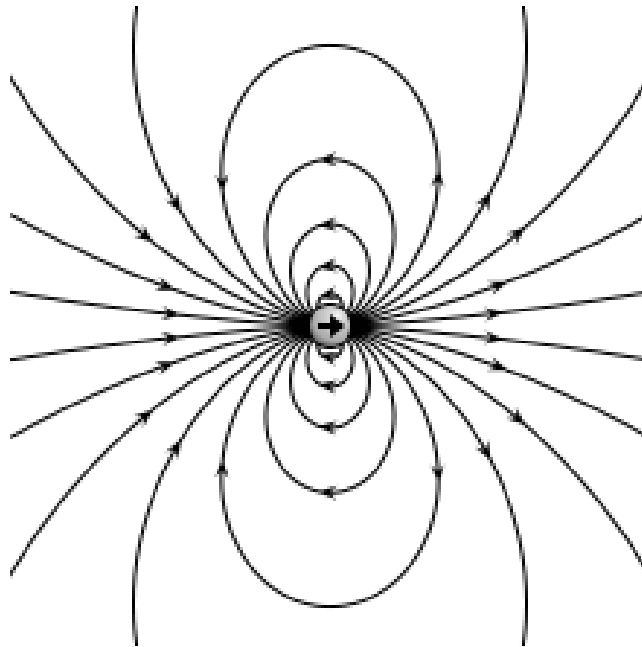
ahol

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|}$$

a dipólustól a megfigyelési pont irányába mutató egységvektor.

7 PONTSZERŰ DIPÓLUS ELEKTROSTATIKUS MEZEJE

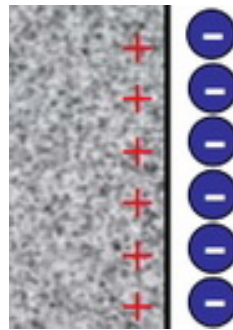
Hengerszimmetrikus elektrosztatikus mező, melynek tengelye párhuzamos a \vec{p} dipólmomentummal.



A potenciál a távolság négyzetével, míg a **térerősség a távolság köbével fordítva arányosan csökken** bármely adott irány mentén.

8. Folytonos dipóleloszlások

Folytonos dipóleloszlások: térfogati vagy felületi ('kettősréteg').



Felületi dipóleloszlás jellemezhető egy skalár mennyiséggel, a $\nu(\vec{\mathbf{r}})$ **felületi momentumsűrűséggel**: egy $\vec{\mathbf{r}}$ körüli, $\Delta\mathbf{s}$ felületelem-vektorú infinitezimális felületdarab dipólmomentuma $\nu(\vec{\mathbf{r}})\Delta\mathbf{s}$ (mindig normális irányú).

Osszuk fel a kettősréteg Σ felületét kicsiny, $\vec{\mathbf{R}}_i$ körüli és $\vec{\Delta\mathbf{s}}_i$ felületelemvektorú darabokra: ezek mindegyikének járuléka a potenciálhoz

$$\Phi_i(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\nu(\vec{\mathbf{R}}_i) \vec{\Delta\mathbf{s}}_i \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

Ezen járulékokat felösszegezve, és a felosztást minden határon túl finomítva kapjuk, hogy a $\nu(\vec{\mathbf{r}})$ felületi momentumsűrűségű kettősréteg potenciálja

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \lim \sum_i \frac{\nu(\vec{\mathbf{R}}_i) (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3} \cdot \vec{\Delta\mathbf{s}}_i = \int_{\Sigma} \frac{\nu(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

A potenciál nem folytonos, a kettősrétegen áthaladva

$$\Phi_+(\vec{\mathbf{r}}) - \Phi_-(\vec{\mathbf{r}}) = 4\pi\nu(\vec{\mathbf{r}})$$

ugrást szenved.

Térbeli folytonos dipóleloszlás jellemzése a **momentumsűrűség-vektorral**:

(egységnyi térfogat dipólmomentuma).

Ha a $\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})$ momentumsűrűségű dipóleloszlás a \mathcal{V} tartományban lokalizált, akkor a potenciál kifejezése

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} \right) = \frac{\operatorname{div} \vec{\mathbf{P}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} + \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

vektoranalitikai azonosság és a Gauss-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{r}}) &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ \operatorname{div} \left(\frac{\vec{\mathbf{P}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} \right) - \frac{\operatorname{div} \vec{\mathbf{P}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} \right\} d^3 \vec{\mathbf{R}} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{-\operatorname{div} \vec{\mathbf{P}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3 \vec{\mathbf{R}} + \int_{\partial \mathcal{V}} \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} |d\vec{\mathbf{s}}| \end{aligned}$$

ahol $\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}})$ a $\partial \mathcal{V}$ határfelület normális egységvektora az $\vec{\mathbf{r}}$ pontban.

8 FOLYTONOS DIPÓLELOSZLÁSOK

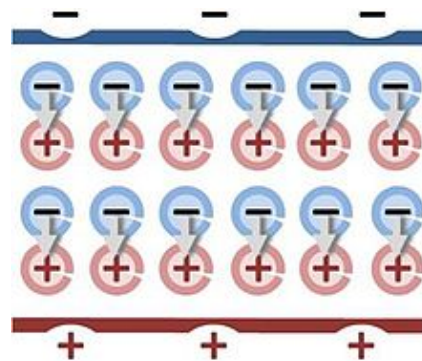
A potenciál alakja ugyanolyan, mint egy

$$\rho_p(\vec{r}) = -\text{div } \vec{P}$$

sűrűségű folytonos térbeli töltéeloszlás és egy, a határfelületre lokalizált

$$\eta_p(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$$

sűrűségű felületi eloszlás potenciáljának szuperpozíciója .



9. A multipólus-kifejtés

Tekintsünk egy véges \mathcal{V} térrészben lokalizált folytonos térbeli töltéseloszlást $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ térfogati töltéssűrűséggel. A potenciál

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

Távol \mathcal{V} -től, amikor a megfigyelési pont bármely \mathcal{V} -beli ponttól mért távolsága sokkal nagyobb, mint a \mathcal{V} -beli pontok kölcsönös távolságai, használható az alábbi sorfejtés.

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}|} + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \frac{\{3(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^2 - \vec{\mathbf{r}}^2 \vec{\mathbf{R}}^2\}}{2|\vec{\mathbf{r}}|^5} + \dots$$

Behelyettesítve a potenciál fenti kifejezésébe kapjuk a

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}}|} + \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2|\vec{\mathbf{r}}|^5} + \dots$$

multipólus-kifejtést, ahol $q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{R}}) d^3\vec{\mathbf{R}}$ a töltéeloszlás össztöltése,

$$\vec{\mathbf{p}} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{R}} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

annak dipólmomentum-vektora, míg $\vec{\mathbf{Q}}$ a **kvadrupólmomentum-tenzor**.

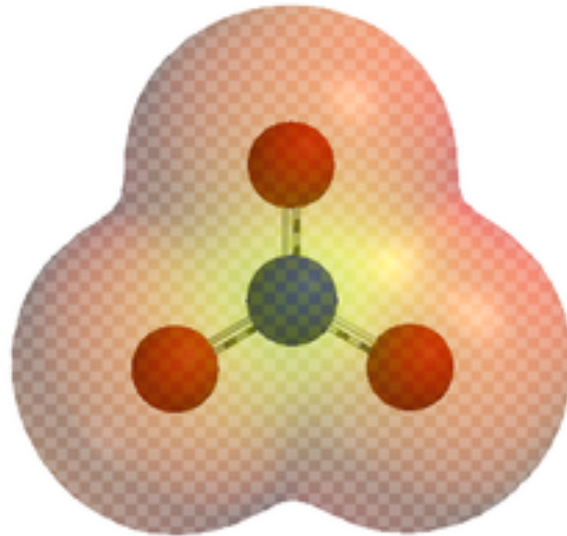
Globális (eloszlás részleteitől független) **jellemzők** határozzák meg a potenciált nagy távolságban.

Magasabb rendű (oktopólus, stb.) tagok általában elhanyagolhatók.

10. Molekuláris töltéseloszlások

Makroszkopikus testek rendkívül nagy számú ($\approx 10^{23}$) elektromosan semleges mikroszkopikus összetevőt – atomok és molekulák – tartalmaznak (kivéve, ha megfelelően nagy energiájú folyamat, pl. radioaktív sugárzás következtében **ionizálódnak**).

Bár az atomok és molekulák elektromosan semlegesek, de nem-triviális a töltéseloszlásuk: a **pozitív töltés** a **kis térfogatú atommagokban** **koncentrálódik**, míg a **negatív töltés** az **elektronfelhőben** **szétkenve** **lehető fel** (kvantumeffektusok és magerők által stabilizált mikroszkopikus **töltésszétválasztás**).



A teljes töltéssűrűség a molekuláris skálánál sokkal nagyobb távolságokon megfigyelhető $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ 'szabad' töltéssűrűség és az egyes molekulákon belüli $\rho_i(\vec{\mathbf{r}})$ töltéssűrűségek összege.

Molekuláris töltéseloszlások figyelembevételével a Gauss-törvény alakja

$$\mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi(\rho + \sum_i \rho_i)$$

Észrevétel.

$$\rho_b(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_i \rho_i(\vec{\mathbf{r}})$$

jelöli az atomok/molekulák 'kötött' töltéssűrűségét.

Az elektrosztatikus potenciál

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} + \sum_i \int \frac{\rho_i(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} = \Phi_{\text{vac}}(\vec{\mathbf{r}}) + \sum_i \Phi_i(\vec{\mathbf{r}})$$

Az első tag a $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ töltéseloszlás vákuumbeli potenciálja, míg a közeg jelenlétét a második tag tükrözi, amely az egyes atomok/molekulák $\Phi_i(\vec{\mathbf{r}})$ járulékainak összege.

Bármely makroszkopikus térfogathoz viszonyítva, az egyes atomok/molekulák pontszerűek és távoliak \rightsquigarrow az egyes atomok/molekulák járulécai jó közelítéssel leírhatók a

$$\Phi_i(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|} + \frac{\vec{\mathbf{p}}_i \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3} + \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i) \cdot \vec{\mathbf{Q}}_i \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{2|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^5} + \dots$$

multipól-sorfejtés segítségével, ahol $\vec{\mathbf{R}}_i$ jelöli az i -edik atom/molekula helyvektorát, $q_i = \int \rho_i(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$ az elektromos töltését, $\vec{\mathbf{p}}_i = \int \rho_i(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{r}} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$ a dipólmomentumát, és végül $\vec{\mathbf{Q}}_i = \int \rho_i(\vec{\mathbf{r}})(3\vec{\mathbf{r}} \circ \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^2) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$ a kvadrupól-momentum tenzorát.

Atomok/molekulák elektromosan semlegesek, ezért az első tag hiányzik, és csak a magasabb-rendű tagok adnak járulékot.

Nagy számú mikroszkopikus összetevő bármely makroszkopikus térfogatban, ezért a molekuláris járulékok összege jól közelíthető folytonos dipólus-, kvadrupólus-, stb. eloszlásokra vett integrállal

$$\sum_i \Phi_i(\vec{\mathbf{r}}) = \int \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}} + \int \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}) \cdot \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{R}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{2|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^5} d^3\vec{\mathbf{R}} + \dots$$

ahol $\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}) = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i$ (a polarizáció-vektor) és $\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{R}}) = \sum_i \vec{\mathbf{Q}}_i$ jelöli a molekuláris dipól- és kvadrupólmomentumok összegét egy $\vec{\mathbf{R}}$ körüli egységnyi térfogatban.

Szabad töltések elektrosztatikus mezeje befolyásolja az egyes molekulák belső töltéseloszlását (**dielektromos polarizáció**), ami makroszkopikus dipólmomentum sűrűségre vezet, ezért a **magasabb multipólus-járulékok elhanyagolhatók** makroszkopikus skálán.

$$\begin{aligned} \sum_i \Phi_i(\vec{r}) &= \int \frac{\vec{P}(\vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} d^3\vec{R} = \\ &= - \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R} + \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

innen a kötött töltések sűrűsége

$$\rho_b(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = -\mathbf{div} \vec{P}$$

$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi(\rho + \sum_i \rho_i)$ Gauss-törvény következtében

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} - 4\pi\rho_b = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}})$$

vagyis

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}$$

jelöléssel

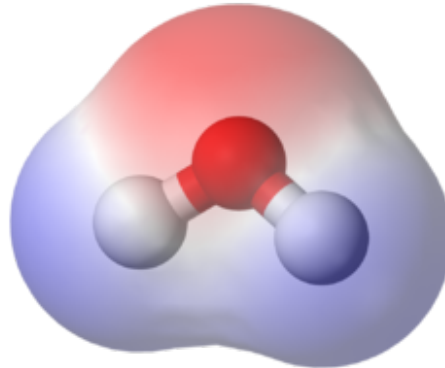
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho}$$

\rightsquigarrow ha Q jelöli a \mathcal{V} térrészben található összes töltést, akkor a Gauss-tétel felhasználásával

$$\boxed{\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 4\pi Q}$$

11. Dielektromos polarizáció

Poláros molekulák (H_2O , NH_3 , HCl): $|\vec{\mathbf{p}}_i| \neq 0$ nem-zérus dipólmomentum (oka **strukturális aszimmetria**).



Apoláros molekulák (H_2 , O_2 , CH_4): $|\vec{\mathbf{p}}_i| = 0$.

$\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})$ polarizációs vektor az egységnyi térfogatban található molekulák momentumainak összege (**dipólmomentum-sűrűség**).

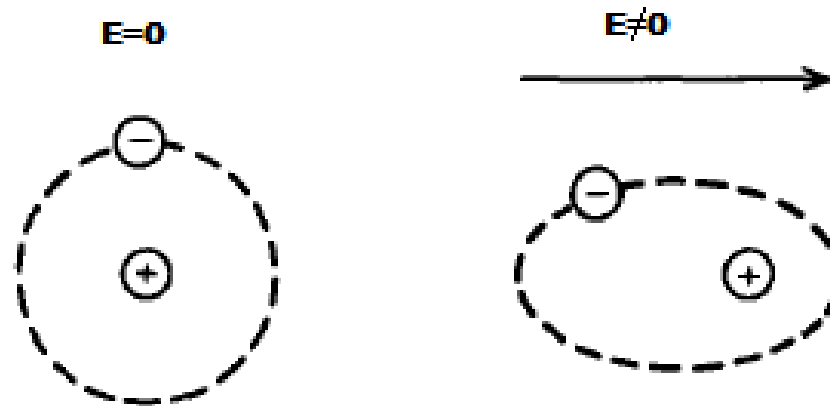
Külső mező hiányában a poláros molekulák momentumainak iránya általában véletlenszerű, ezért – kivételes esetektől eltekintve (pl. **elektrétek** és **ferroelektromos anyagok**) – a $\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})$ polarizációs vektor zérus.

Dielektromos polarizáció: külső elektromos mező módosítja mind a molekulákon belüli töltéseloszlásokat, mind dipólmomentumaik irányának statisztikus eloszlását, ezáltal makroszkopikus dipólmomentum-sűrűséget hozva létre.

Észrevétel. Kvantum szinten **vákuumpolarizációs effektusok** lépnek fel (virtuális párkeltés), de ezek makroszkopikus méreteknél nem játszanak szerepet.

Három alapvető polarizációs mechanizmus:

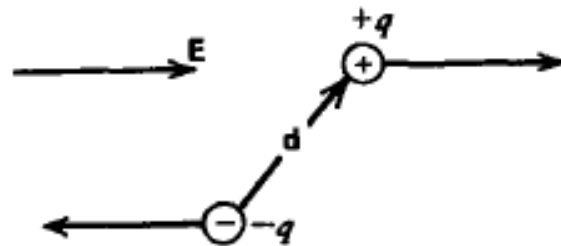
1. **Deformációs (elektron-)polarizáció:** külső elektromos mező deformálja a molekulák negatív töltésű elektronfelhőjét, megváltoztatva annak töltésközéppontját a pozitív töltésű atommagokhoz viszonyítva \rightsquigarrow molekulák elektromos dipólmomentuma megváltozik.



1. ábra. Deformációs polarizáció

2. **Orientációs polarizáció:** poláros molekulák belső dipólmomentumát a külső elektromos mező igyekszik befordítani a saját irányába (ennek ellenében hat a hőmozgás) \rightsquigarrow **megváltozik a momentumok irányeloszlása.**

3. **Ionpolarizáció:** ionos kristályokban az **ellentétes töltésű ionok relatív helyzete megváltozik** a külső mező hatására, ezáltal megváltoztatva a dipólusmomentum-sűrűséget.



Orientációs és ionos polarizáció

Poláros molekulák esetén a domináns mechanizmus az orientációs polarizáció, az elektron- és ionpolarizáció csak apoláros molekulák esetén releváns.

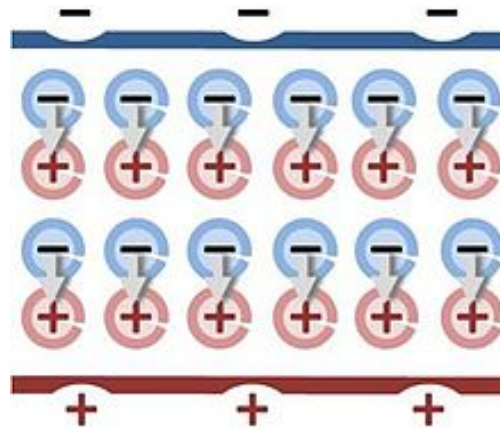
Indukált momentum mindig párhuzamos a külső tér irányával (és azzal egy irányba mutat) izotrop anyagok esetén.

Hőmérsékletfüggés: elektron- és ionpolarizáció gyakorlatilag független a hőmérséklettől, míg az orientációs polarizáció csökken növekvő hőmérséklettel, mert a termikus fluktuációk rendezetlenné teszik a molekuláris dipólusok irányát.

Piezo(piro-)elektromosság: mechanikai feszültség (hőmérséklet változás) indukálta polarizáció.

12. Spontán polarizáció

Nemzérus polarizációs vektor (dipólmomentum-sűrűség) külső tér hiányában is.



Elektrétek: olyan poláris molekulákból álló műanyagok és viaszok, melyek momentumai befagytak egy irányba, miután azokat egy külső mező egy magasabb hőmérsékleten rendezte (**metastabil állapot**).

Ferro-elektromos anyagok: erős molekuláris dipólus-dipólus kölcsönhatások következtében **makroszkopikus méretű domének alakulnak ki párhuzamos momentumokkal** \rightsquigarrow lehetőség nemzérus polarizációra külső mező hiányában is.

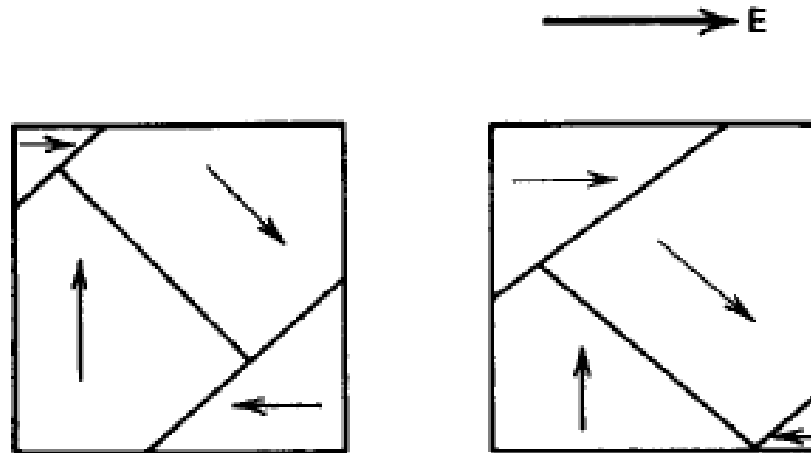
Növekvő hőmérséklettel spontán polarizáció eltűnik a ferro-elektromos **Curie-hőmérsékleten**, mivel a hőmozgás energiája rendezetlenné teszi a momentumok irányát (**másodrendű fázisátalakulás**).

Momentumok iránya függ a minta történetétől, és csak speciális preparálás esetén teljesen véletlenszerű.

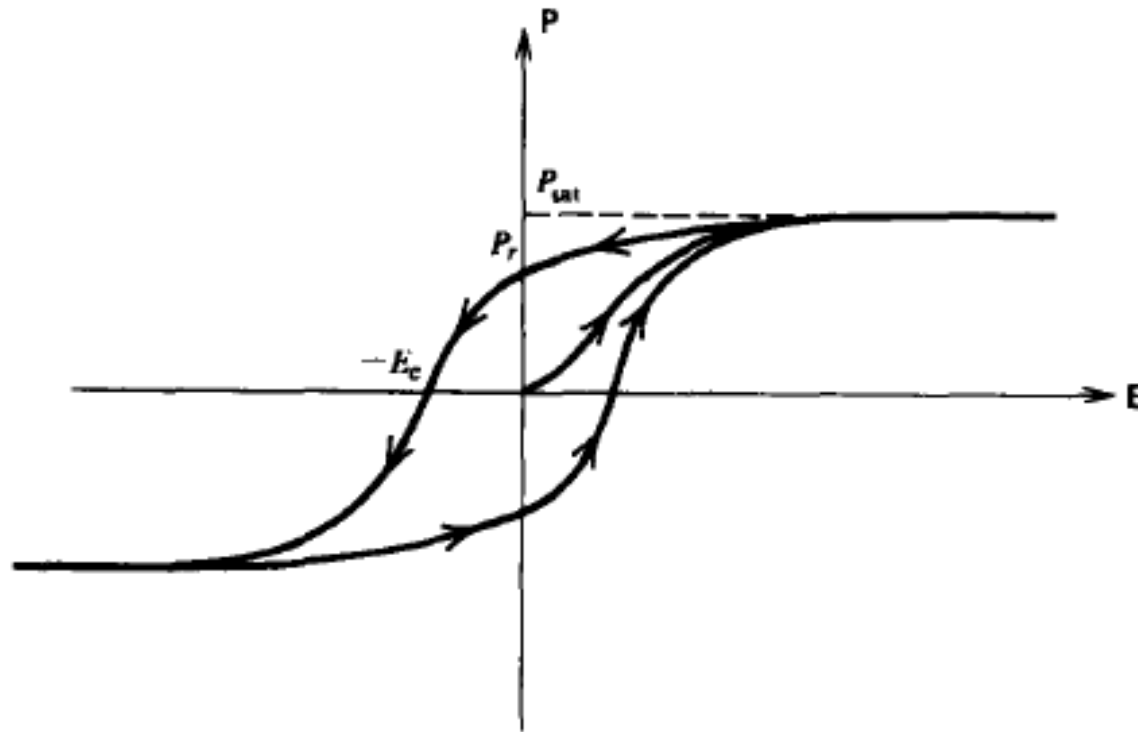
12 SPONTÁN POLARIZÁCIÓ

Az egyes molekuláris momentumok csak a domének határán változhatnak (ahol a többi momentum hatása nem annyira jelentős) \rightsquigarrow doménfalak mozgása a külső mező hatására: a külső mező irányával közel párhuzamos domének nőnek a többiek rovására, ezáltal a polarizáció is változik.

Szaturáció, amikor már csak egy domén marad, és az összes momentum párhuzamos a külső mező irányával.



Polarizációs görbe



Hisztérezis: polarizáció nem csak az adott időpontbeli elektromos mezőtől függ, de annak korábbi értékeitől is (**memória-effektus**).

13. A permittivitás (dielektromos állandó)

Spontán polarizáció hiányában a $\vec{\mathbf{P}}$ polarizációs vektor jól közelíthető $\vec{\mathbf{E}}$ szerinti sorfejtésének néhány első tagjával

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi_e \vec{\mathbf{E}} + \dots$$

χ_e a közeg **elektromos szuszceptibilitása**: izotrop anyagokra skalár, míg anizotrop anyagokra tenzor.

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$$

lineáris anyagi összefüggés, ahol $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ a közeg **permittivitása** (dielektromos állandója).

Vákuumban $\chi_e = 0$ és $\varepsilon = 1$, azaz $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}}$.

13 A PERMITTIVITÁS (DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ)

anyag	permittivitás
víz	80
etanol	24
metanol	33
polietilén	2.2
PVC	6.1
plexi-üveg	3.4
paraffin viasz	2.2
bárium-titanát	>2100

Néhány anyag permittivitása szobahőmérsékleten

13 A PERMITTIVITÁS (DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ)

Mivel izotrop közegben $\vec{\mathbf{P}}$ egyirányú $\vec{\mathbf{E}}$ -vel, ezért $\chi_e \geq 0$ és $\varepsilon \geq 1$.

Kötött molekuláris töltések sűrűsége (homogén izotrop közegben)

$$\rho_b = -\mathbf{div} \vec{\mathbf{P}} = -\chi_e \mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\chi_e}{\varepsilon} \mathbf{div} \vec{\mathbf{D}} = -\frac{4\pi\chi_e}{\varepsilon} \rho = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rho$$

míg a teljes (szabad + kötött) töltéssűrűség

$$\boxed{\rho + \rho_b = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Poisson-egyenlet:

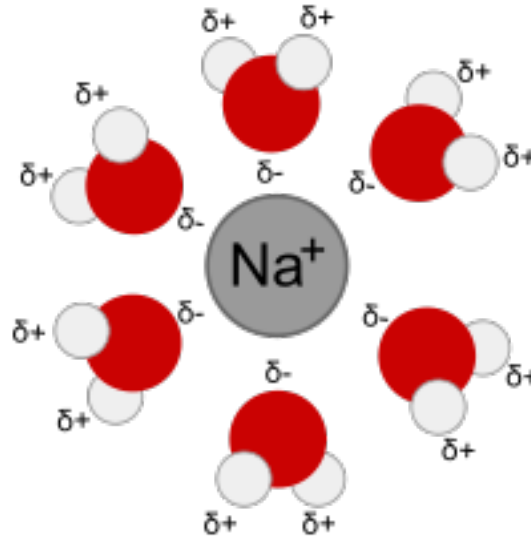
$$\mathbf{div}(\varepsilon(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{grad} \Phi) = -4\pi\rho(\vec{\mathbf{r}})$$

Homogén és izotrop közegben

$$\Delta\Phi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

13 A PERMITTIVITÁS (DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ)

Közeg polarizációjának hatása: [szabad töltések leárnyékolása](#).



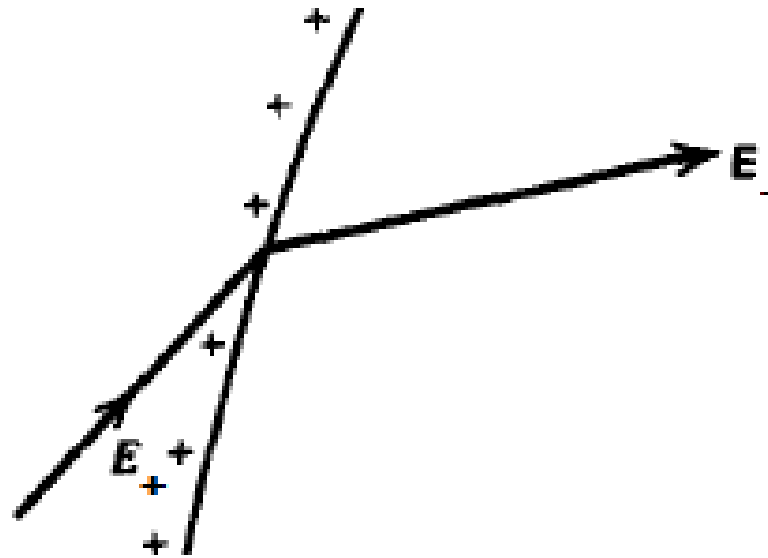
Coulomb-törvény (homogén és izotrop) dielektrikumban:

$$\vec{\mathbf{E}}(q, \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{\varepsilon} \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

14. Illesztési feltételek közegek határán

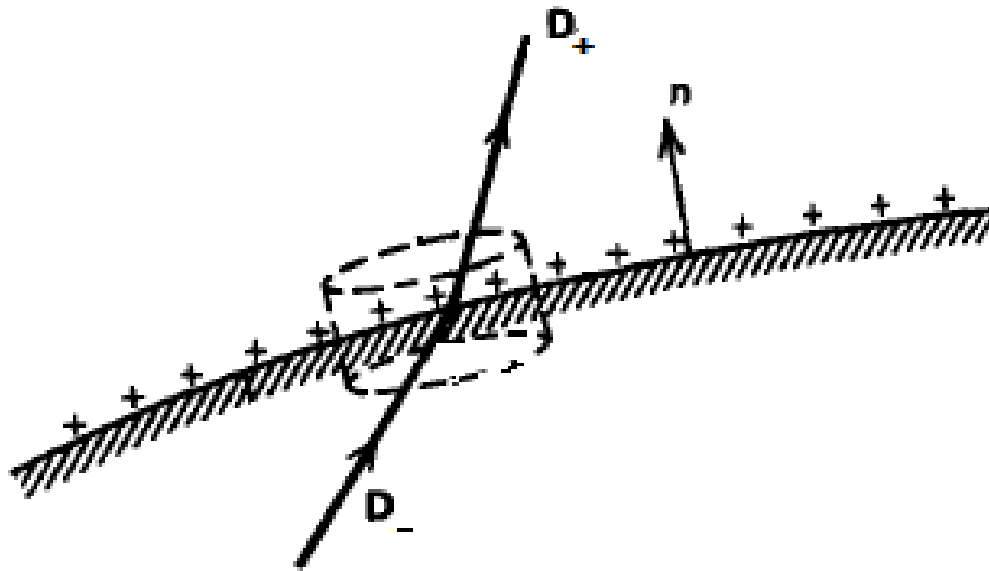
Adott közeg belsejében a térjellemzők folytonosan változnak, de két különböző közeg határán egyesek ugrást szenvednek, vagyis a határfelület egy adott pontjában a térjellemzők értéke függ attól, hogy a pontot a felület melyik oldaláról (melyik közeg belsejében) közelítjük meg: ha minden térjellemző folytonosan változna, akkor mindkét közegben ugyanazon anyagi összefüggések teljesülnének, és a két közeg nem különbözne egymástól elektromos szempontból.

Határfelületen töltések halmozódhatnak fel (illetve áramolhatnak annak mentén) \rightsquigarrow **felületi töltések** és áramok eredete.



Megjegyzés: a **határfelület** egy makroszkopikus idealizáció, valójában egy vékony, néhány atomnyi vastagságú rétegről van szó, amelyen belül a térjellemzők gyorsan, de folytonosan változnak, viszont makroszkopikus skálán ez az átmeneti zóna egy matematikai felületként kezelhető, és a térjellemzők gyors változása **diszkontinuitásként** írható le.

Válasszuk ki a határfelület egy \mathcal{F} darabját, és jelölje \mathcal{V} a határfelületet merőlegesen metsző, mindkét közegbe h távolságra benyúló, \mathcal{F} alapú hengeres testet. Jelölje továbbá \mathcal{F}_- és \mathcal{F}_+ a hengerfelület alap és fedőlapját, és \mathcal{P} a palástját.



Amennyiben Q jelöli a \mathcal{V} belsejében található összes töltést, akkor

$$4\pi Q = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\mathcal{F}_-} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\mathcal{F}_+} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Ahogy a henger magassága nullához tart ($h \rightarrow 0$ határeset), a belsejében található töltések a határfelületre koncentrálnak, így

$$Q = \int_{\mathcal{F}} \eta(\vec{\mathbf{r}}) |d\vec{\mathbf{s}}| = \int_{\mathcal{F}} \eta(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

ahol $\eta(\vec{\mathbf{r}})$ a felületi töltéssűrűség, míg $\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}})$ a határfelület $\vec{\mathbf{r}}$ -beli normálisa.

Ahogy a hengert a felületre lapítjuk, a \mathcal{P} palástra vett $\int_{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ integrál, mivel a palást felszínével arányos, nullához tart

$$\int_{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \rightarrow 0$$

Az \mathcal{F}_- alap- és a \mathcal{F}_+ fedőlap a $h \rightarrow 0$ határesetben az \mathcal{F} -re símul, de ellentétes irányú normálissal, ezért

$$\int_{\mathcal{F}_{\pm}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \rightarrow \int_{\mathcal{F}} \vec{\mathbf{D}}_{\pm} \cdot (\pm \vec{\mathbf{n}}) |d\vec{\mathbf{s}}| = \pm \int_{\mathcal{F}} \vec{\mathbf{D}}_{\pm} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

tekintetbe véve, hogy az \mathcal{F}_+ mentén $\vec{\mathbf{D}}_+$, míg \mathcal{F}_- mentén $\vec{\mathbf{D}}_-$ a térjellemző értéke. Innen

$$\int_{\mathcal{F}} 4\pi\eta(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 4\pi Q = \int_{\mathcal{F}} (\vec{\mathbf{D}}_+ - \vec{\mathbf{D}}_-) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Fentiek alapján a határfelület tetszőlegesen választott \mathcal{F} darabjára

$$\int_{\mathcal{F}} \left(\vec{\mathbf{D}}_+(\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\mathbf{D}}_-(\vec{\mathbf{r}}) - 4\pi\eta\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}}) \right) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$$

Az \mathcal{F} felületet egy pontra összehúзва (mivel a $d\vec{\mathbf{s}}$ felületelem párhuzamos az $\vec{\mathbf{n}}$ normális egységvektorral) adódik

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \left(\vec{\mathbf{D}}_+ - \vec{\mathbf{D}}_- \right) = 4\pi\eta$$

$\vec{\mathbf{D}}$ normális komponense $4\pi\eta$ nagyságú ugrást szenved a határfelületen!

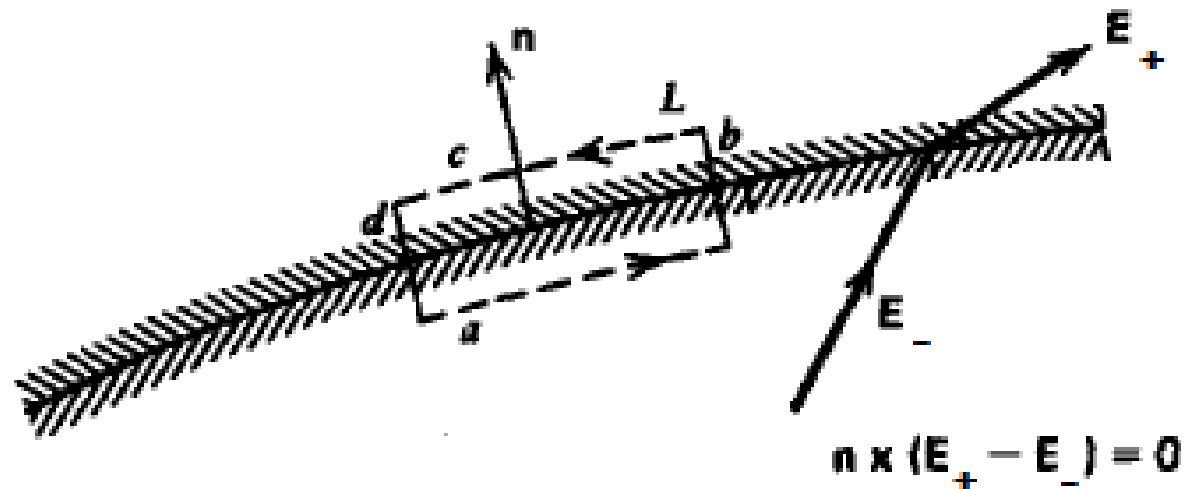
Vezető-dielektrikum határfelületen, mivel a vezető belsejéből az elektrosztatikus mező kiszorul ($\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{0}}$), ezért $\vec{\mathbf{D}}$ normális komponensének dielektrikumbeli értéke a határfelületen az indukált felületi töltéssűrűség 4π -szerese \rightsquigarrow vezető testet kettéosztva elég kicsiny, $\vec{\mathbf{n}}$ normálisú és F felszínű keresztmetszet mentén, az egyes részek

$$Q_{\pm} = \pm F \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$$

töltésre tesznek szert \rightsquigarrow

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}} \text{ az eltolási vektor!}$$

Legyen L egy, a két közeg határát merőlegesen metsző kicsiny téglalap, melynek határa $\partial L = a + b + c + d$ a megfelelő irányításokkal.



Az elektrosztatikus mező konzervatív, így

$$0 = \int_{\partial L} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_b \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_c \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_d \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Ha L -t rázsugorítjuk a határfelületre, akkor b és d görbék hossza 0-hoz tart, ezért a b és d menti integrálok 0-hoz tartanak, míg a és c rásimul (ellentétes irányítással) a felületre egy γ görbe (a téglalap és a határfelület metszészvonala) mentén, így

$$\int_a \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \rightarrow \int_{\gamma} \vec{\mathbf{E}}_-(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad \text{és} \quad \int_c \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \rightarrow - \int_{\gamma} \vec{\mathbf{E}}_+(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Innen

$$\int_{\gamma} \left(\vec{\mathbf{E}}_+ - \vec{\mathbf{E}}_- \right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$$

bármely, a határfelület belsejében futó γ görbére.

Infinitezimális $l_\gamma \rightarrow 0$ hosszúságú görbeszakasz esetén

$$0 = \int_{\gamma} (\vec{\mathbf{E}}_+ - \vec{\mathbf{E}}_-) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{E}}_+(\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\mathbf{E}}_-(\vec{\mathbf{r}})) \cdot \vec{\mathbf{t}} l_\gamma$$

ahol $\vec{\mathbf{t}}$ a γ görbe érintővektora az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú pontban, ahonnan

$$\vec{\mathbf{E}}_+(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{E}}_-(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{t}}$$

bármely, a határfelületet érintő $\vec{\mathbf{t}}$ vektorra.

A **térerősség tangenciális** (érintőirányú) **komponense**
folytonosan változik különböző közegek határán!

A térerősség-vektor ugrása mindig normális irányú.