

# Elektrosztatika

## 1. Bevezetés

Elég hosszú (relaxációs időnél hosszabb) időfejlődés után egy zárt fizikai rendszer általában statikus egyensúlyi állapotba kerül, ahol megszűnik minden állapotváltozás.

**Elektrosztatika:** nyugvó elektromos töltések által létrehozott elektromos mezők vizsgálata.

Mivel nincsenek mozgó töltések, ezért az áramsűrűség és a mágneses mező eltűnik, és minden jellemző mennyiség időben állandó.

### 2. A Coulomb-törvény



Két pontszerű töltés között ható elektromos erő az őket összekötő egyenes mentén hat, és nagysága arányos a töltések nagyságával, illetve fordítva arányos a távolságuk négyzetével.

$$|\vec{F}| \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

## 2 A COULOMB-TÖRVÉNY

---

Coulomb-törvény következtében az  $\vec{\mathbf{R}}$  helyvektorú pontba helyezett  $q$  nagyságú **ponttöltés elektromos térerőssége** az  $\vec{\mathbf{r}}$  helyvektorú pontban (vákuumban)

$$\vec{\mathbf{E}}(q, \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

**Szuperpozíció elve:** töltésrendszer által kifejtett erő a rendszert alkotó töltések által kifejtett erők vektoriális összegével egyenlő.

$(q_1, \vec{\mathbf{R}}_1), \dots, (q_n, \vec{\mathbf{R}}_n)$  ponttöltésekből álló töltésrendszer elektrosztatikus mezejének térerőssége vákuumban

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{E}}(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

$\rho(\vec{\mathbf{r}})$  térfogati töltéssűrűségű folytonos töltéseloszlás esetén osszuk fel a teret  $\mathcal{V}_i$  infinitezimálisan kicsiny térrészekre, és jelölje  $\vec{\mathbf{R}}_i$  a  $\mathcal{V}_i$  térrész valamely pontjának helyvektorát. Ekkor  $\mathcal{V}_i$  töltése  $q_i = \rho(\vec{\mathbf{R}}_i)|\mathcal{V}_i|$ , ezért

$$\vec{\mathbf{E}}(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}}_i)|\mathcal{V}_i|(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

járulékot ad a térerősséghez. Ezen járulékok felösszegzésével, a felosztást minden határon túl finomítva kapjuk a teljes térerősséget:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \lim \sum_{i=1}^n \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}}_i)|\mathcal{V}_i|(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3} = \int \rho(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

Fentiek alapján pontosan meg tudnánk határozni (elvileg) az elektrosztatikus mező térerősségét bármely pontban, de ehhez **tudnunk kellene a pontos töltéseloszlást az egész Univerzumban** (a kölcsönhatás végtelen hatótávolsága következtében). De az Univerzumnak csak (nagyon) kis részéről vannak pontos, méréseken alapuló ismereteink; másfelől a térerősséget is csak ezekben a térrészekben kívánjuk meghatározni.

**Holografikus elv:** a fizikai jellemzőknek a vizsgált tartomány határán történő meghatározásával lehet figyelembe venni a nem ismert tartományokban uralkodó töltéssűrűséget.

### 3. A Gauss-törvény

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int \rho(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

integrálkifejezés divergenciája

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho}$$

**Integrális alak** (a divergencia-tétel felhasználásával)

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} d^3\vec{\mathbf{r}} = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) d^3\vec{\mathbf{r}} = 4\pi Q$$

ahol  $Q$  jelöli a  $\mathcal{V}$  térrészben található össztöltést, míg  $\partial\mathcal{V}$  a térrészt határoló felületet.

**Gauss-törvény:** a térerősség-vektor felületi integrálja egy zárt felületre egyenlő a felület belsejében található töltés mennyiségének  $4\pi$ -szeresével.

Ebben a formában csak vákuumban érvényes, anyagi közegben módosul a mikroszkopikus szintű töltésszétválás következtében, mert figyelembe kell venni a molekuláris töltéseloszlások hatását.

Nem csak elektrosztatikában, de mozgó töltések és időben változó mezők esetén is teljesül.

*Megjegyzés:* a térerősség-vektornak egy olyan gömb belsejére vett átlaga, amelynek belsejében nincsenek töltések, megegyezik a térerősségnek a gömb középpontjában felvett értékével.

## 4. Az elektrosztatikus potenciál

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int \rho(\vec{\mathbf{R}}) \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

egy  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  térfogati töltéssűrűségű folytonos töltéseloszlás elektrosztatikus mezejének térerősség vektora (vákumban).

Az **elektrosztatikus mező örvénymentes**:  $\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ .

**Elektrosztatikus potenciál**: olyan  $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$  skalármező amelyre

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\text{grad } \Phi(\vec{\mathbf{r}})}$$

Az **elektrosztatikus mező jellemezhető egyetlen skalármezővel** az  $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$  vektormező három (nem független!) komponense helyett!



Bármely, az  $\vec{r}_1$  pontot  $\vec{r}_2$ -vel összekötő  $\gamma$  görbére

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = \int_{\gamma} \mathbf{grad} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W[\gamma]$$

az egységnyi töltésen végzett munka  $\gamma$  mentén történő mozgatása során.

Az elektrosztatikus mező **konzervatív**: töltések mozgása során az elektrosztatikus mező által végzett munka csak a mozgás kezdő- és végpontjától függ, de független a mozgás során befutott pályától.

**Mértékinvariancia**: csak a potenciál-különbségeknek van fizikai értelme, a potenciál maga csak egy additív konstans erejéig meghatározott, mivel

$$\Phi'(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + A$$

ugyanazt az elektrosztatikus mezőt írja le mint  $\Phi(\vec{r})$  bármely  $A$ -ra.

## 4 ELEKTROSZTATI KUS POTENCIÁL

---

Normálhatjuk a potenciált a mértékinvariancia felhasználásával, azaz tetszőlegesen előírhatjuk az értékét bármely pontban (az  $A$  konstans megfelelő választásával).

**Szokásos normálás:** a potenciál tűnjön el a vizsgált tartománytól távol (ha lehetséges), vagyis  $\Phi(\infty) = 0$ .

$\vec{\mathbf{R}}$  helyvektorú pontba helyezett  $q$  nagyságú **ponttöltés elektrosztatikus potenciálja**

$$\Phi^{(q, \vec{\mathbf{R}})}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|}$$

**Szuperpozíció elve:** töltésrendszer potenciálja a rendszert alkotó töltések potenciáljainak összege.

$(q_1, \vec{\mathbf{R}}_1), \dots, (q_n, \vec{\mathbf{R}}_n)$  ponttöltésekből álló rendszer potenciálja

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \Phi^{(q_i, \vec{\mathbf{R}}_i)}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|}$$

Folytonos töltéeloszlás elektrosztatikus mezejének potenciálja

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{R}} + \int_{\Sigma} \frac{\eta(\vec{\mathbf{R}})\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

ha  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  jelöli a térfogati és  $\eta(\vec{\mathbf{r}})$  a felületi töltéssűrűséget, és  $\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}})$  a  $\Sigma$  felület normális egységvektora.

## 5. A Poisson-egyenlet

Mivel (vákuumban)  $\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad} \Phi$  és  $\mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$ , ezért teljesül a

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

Poisson-egyenlet, ahol

$$\Delta\Phi = \mathbf{div}(\mathbf{grad} \Phi)$$

Descartes-koordinátákban

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

A Poisson-egyenlet egy másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet a potenciálra.

Poisson-egyenlet **partikuláris megoldása** valamely  $\mathcal{V}$  térrészben

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

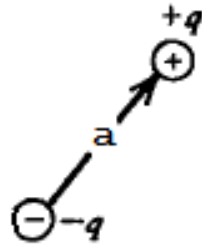
Tetszőleges megoldás ezen partikuláris megoldás és a  $\Delta\Phi = 0$  **Laplace-egyenlet** valamely megoldásának összege.

Adott  $\mathcal{V}$  tartományon kívüli elektromos töltések hatása **határfeltételek** révén (a potenciál viselkedése  $\mathcal{V}$  határán) vehető figyelembe.

Adott határfeltételek mellett a **Poisson-egyenletnek** mindig **létezik** (egy additív konstans erejéig egyértelmű) **megoldása**.

## 6. Pontszerű dipólus elektrosztatikus mezeje

Tekintsük egy, az  $\vec{\mathbf{R}}_{\pm}$  helyvektorú pontokban elhelyezett  $\pm q$  ponttöltések által alkotott elektromos dipólust.



$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{R}}_{+} - \vec{\mathbf{R}}_{-}$  jelöli a két töltést összekötő vektort, míg  $\vec{\mathbf{R}} = (\vec{\mathbf{R}}_{+} + \vec{\mathbf{R}}_{-})/2$  a dipólus töltésközéppontjának helyvektorát.

$$\vec{\mathbf{R}}_{\pm} = \vec{\mathbf{R}} \pm \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} = \frac{q(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \\
&= \frac{q(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \frac{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)} \\
&= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|} \frac{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|^2 - |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|^2)}{(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}
\end{aligned}$$

Felhasználva a tetszőleges vektorokra érvényes  $|\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})$  azonosságot ( $\vec{v} = \vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-$  és  $\vec{w} = \vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+$  választással)

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{q(2\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_- - \vec{\mathbf{R}}_+) \cdot (\vec{\mathbf{R}}_+ - \vec{\mathbf{R}}_-)}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)} \\
&= \frac{2q(\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}) \cdot \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+||\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-|(|\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_-| + |\vec{r} - \vec{\mathbf{R}}_+|)}
\end{aligned}$$

Pontszerű dipólus ( $|\vec{\mathbf{a}}| \ll |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|$ ) esetén

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_+| \approx |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_-| \approx |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|$$

ezért **legalacsonyabb rendben** ( $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{a}}$  a dipólmomentum-vektor)

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

Innen az elektromos térerősség

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{grad} \Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{3(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

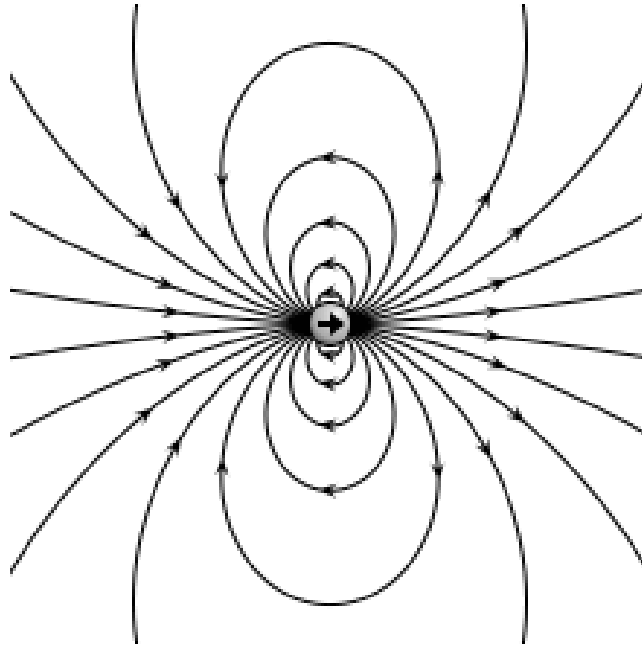
ahol

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|}$$

a dipólustól a megfigyelési pont irányába mutató egységvektor.



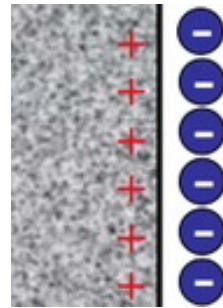
Hengerszimmetrikus elektrosztatikus mező, melynek tengelye párhuzamos a  $\vec{p}$  dipólmomentummal.



A potenciál a távolság négyzetével, míg a **térerősség a távolság köbével fordítva arányosan csökken** bármely adott irány mentén.

## 7. Folytonos dipóleloszlások

Folytonos felületi dipóleloszlás ('kettősréteg') jellemezhető egy skalárral, a  $\nu$  felületi dipólsűrűséggel.



A potenciál

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\Sigma} \frac{\nu(\vec{R})(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \cdot d\vec{s}$$

*Megjegyzés.* A **potenciál ugrást szenved** a kettősréteg felületén áthaladva, melynek nagysága a felületi dipólsűrűség  $4\pi$ -szerese.

Térbeli folytonos dipóleloszlás jellemzése a  $\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})$  **momentumsűrűség-vektorral** (egységnyi térfogat dipólmomentuma).

Egy  $\mathcal{V}$  tartományban lokalizált folytonos dipóleloszlás esetén osszuk fel  $\mathcal{V}$ -t kicsiny  $\mathcal{V}_i$  térrészekre, és jelölje  $|\mathcal{V}_i|$ , ill.  $\vec{\mathbf{R}}_i$  ezen térrész térfogatát és valamely belső pontjának helyvektorát.  $\mathcal{V}_i$  dipólmomentum-vektora  $\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}_i)|\mathcal{V}_i|$ , így járuléka a potenciálhoz

$$\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{R}}_i)|\mathcal{V}_i| \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3}$$

A **teljes potenciált ezen járulékok felösszegzésével** és a felosztás végtelen finomításával kapjuk, azaz

$$\Phi(\vec{r}) = \lim \sum_i \frac{\vec{P}(\vec{R}_i) |\mathcal{V}_i| \cdot (\vec{r} - \vec{R}_i)}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^3} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(\vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} d^3\vec{R}$$

Felhasználva a

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) = \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

vektoranalitikai azonosságot, a fenti [térfogati integrál átírható](#)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) - \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right\} d^3\vec{R} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R} + \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

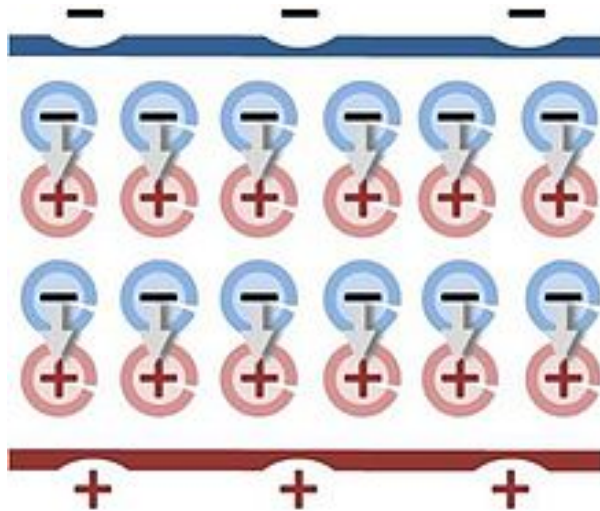
alakba a Gauss-tétel révén.

## 7 FOLYTONOS DIPÓLELOSZLÁSOK

A potenciál megegyezik egy

$$\rho_p(\vec{r}) = -\text{div } \vec{P}$$

sűrűségű folytonos térbeli töltéseloszlás (polarizációs töltések) és egy, a  $\vec{P}$  polarizáció normális komponensével egyező sűrűségű, a határfelületre lokalizált felületi eloszlás potenciáljának szuperpozíciójával.



## 8. A multipólus-kifejtés

A  $\mathcal{V}$  térrészben lokalizált  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  sűrűségű folytonos térbeli töltéseloszlás járuléka a potenciálhoz

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

$\mathcal{V}$ -től nagy távolságra az integrandusban használhatjuk a

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}|} + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \frac{\{3(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^2 - \vec{\mathbf{r}}^2 \vec{\mathbf{R}}^2\}}{2|\vec{\mathbf{r}}|^5} + \dots$$

sorfejtést, így kapjuk a

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}}|} + \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2|\vec{\mathbf{r}}|^5} + \dots$$

multipólus-sorfejtést, ahol

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{R}}) d^3\vec{\mathbf{R}}$$

a töltéseloszlás össztöltése és

$$\vec{\mathbf{p}} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{R}} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

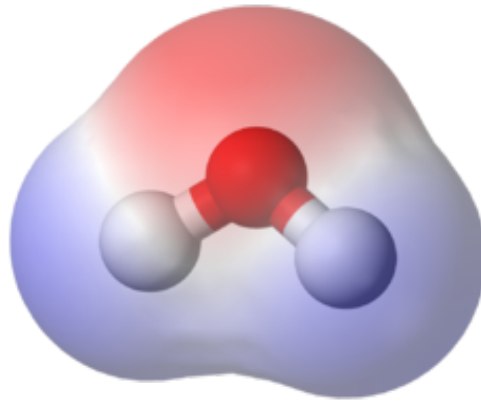
a dipólmomentuma, míg  $\vec{\mathbf{Q}}$  az ún. kvadrupólmomentum-tenzor.

Az eloszlás részleteitől független, globális jellemzők határozzák meg a potenciált nagy távolságban!

Magasabb rendű (oktopólus, stb.) tagok általában elhanyagolhatók.

### 9. Dielektromos polarizáció

**Poláros molekulák** ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HCl}$ ): **nem-zérus**  $|\vec{\mathbf{p}}_i| \neq 0$  saját dipólmomentum (oka valamilyen **strukturális aszimmetria**).



**Apoláros molekulák** ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ): **nincs** saját dipólmomentumuk külső elektromos mező hiányában.



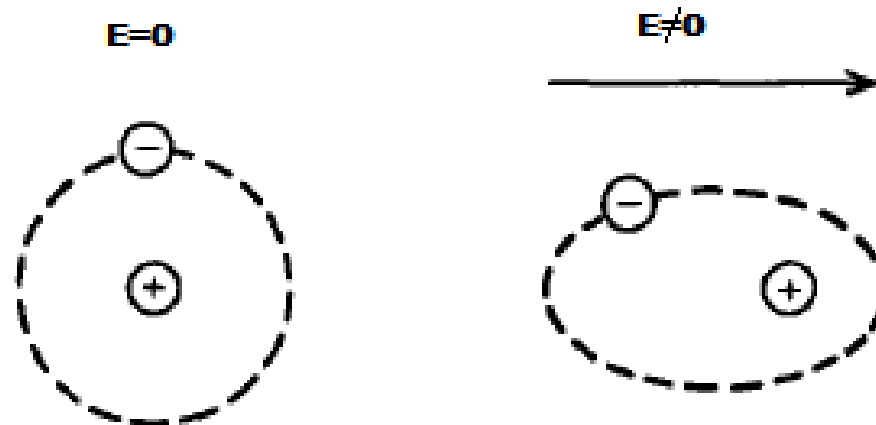
**Spontán polarizáció:** akkor lép fel, ha a közeget alkotó (poláros) molekulák dipólmomentumai valamilyen okból rendezettek, ezáltal eredőjük nem zérus.

Mivel a poláros molekulák momentumainak irányeloszlása - a spontán polarizáció esetétől eltekintve - véletlenszerű, ezért az egységnyi térfogatban található molekulák momentumainak vektori összege - a **polarizációs vektor** - eltűnik külső elektromos mező hiányában.

**Dielektromos polarizáció:** külső elektromos mező makroszkopikus dipóloszlást indukál.

Három alapvető mechanizmus:

1. **Deformációs polarizáció:** a külső elektromos mező deformálja a molekulák negatív töltésű elektronfelhőjét, ezáltal az egyes molekulák elektromos dipólmomentuma megváltozik (**elektronpolarizáció**).

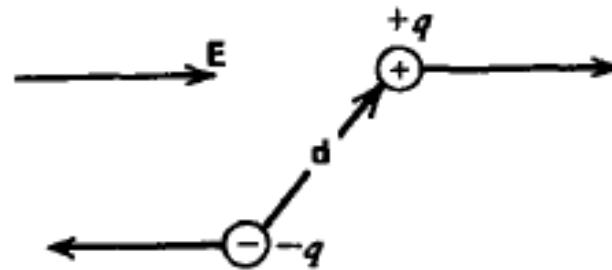


1. ábra. Deformációs polarizáció

## 9 DIELEKTROMOS POLARIZÁCIÓ

---

2. **Orientációs polarizáció:** a poláros molekulák dipólmomentumát a külső elektromos mező igyekszik beforgatni a saját irányába (ennek ellenében hat a hőmozgás), miáltal **megváltozik a momentumok irányeloszlása**.
3. **Ionpolarizáció:** ionos kristályt alkotó **ellentétes töltésű ionok relatív helyzete megváltozik** a külső mező hatására, ezáltal megváltozik a töltéseloszlás a kristályban.



**Orientációs és ionos polarizáció**

**Poláros molekulák** esetén a domináns mechanizmus az orientációs polarizáció, az elektronpolarizáció csak apoláros molekulák esetén releváns.

Izotrop közegek esetén az indukált dipólmomentum párhuzamos a külső tér irányával, és azzal egy irányba mutat.

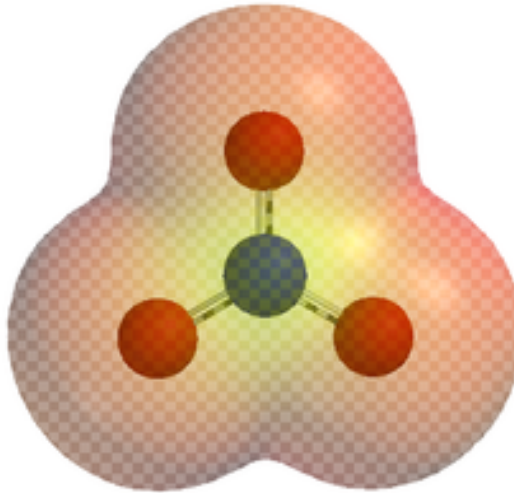
Az elektron- és ionpolarizáció gyakorlatilag független a hőmérséklettől, míg az orientációs polarizáció csökken növekvő hőmérséklettel, mert a molekuláris dipólusok iránya rendezetlenné válik a termikus fluktuációk hatására.

**Piezo- és piroelektromosság:** mechanikai feszültség, illetve hőmérséklet változás indukálta elektromos polarizáció.

## 10. Elektrosztatika szigetelőkben

Makroszkopikus testek rendkívül nagy számú ( $\approx 10^{23}$ ) elektromosan semleges mikroszkopikus összetevőt – atomot és molekulát – tartalmaznak (kivéve, ha megfelelően nagy energiájú folyamat, pl. radioaktív sugárzás következtében **ionizálódnak**).

Bár az egyes atomok és molekulák elektromosan semlegesek, de nemtriviális a töltéseloszlásuk: a **pozitív töltés a kis térfogatú atommagokban koncentrálódik**, míg a **negatív töltés az elektronfelhőben szétkenődik** (kvantumeffektusok és a magerők által stabilizált mikroszkopikus **töltésszétválás**).



Molekuláris töltéseloszlások figyelembevételével a Gauss-törvény alakja

$$\mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \left( \rho + \sum_i \rho_i \right)$$

A teljes töltéssűrűség a molekuláris skálánál sokkal nagyobb távolságokon megfigyelhető  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  'szabad' töltéssűrűség és az egyes molekulákon belüli  $\rho_i(\vec{\mathbf{r}})$  töltéssűrűségek összege.

Az elektrosztatikus potenciál

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int \frac{\rho(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} + \sum_i \int \frac{\rho_i(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} = \Phi_{\text{vac}}(\vec{\mathbf{r}}) + \sum_i \Phi_i(\vec{\mathbf{r}})$$

Az első tag a  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  töltéseloszlás vákuumbeli potenciálja, míg a közeg jelenlétét a második tag tükrözi, amely az egyes atomok/molekulák  $\Phi_i(\vec{\mathbf{r}})$  járulékaiknak összege.

$$\sum_i \Phi_i(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_i \int \frac{\rho_i(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} = \int \frac{\rho_b(\vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}}$$

ahol

$$\rho_b(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_i \rho_i(\vec{\mathbf{r}})$$

jelöli az atomok/molekulák 'kötött' töltéssűrűségét.

Az egyes atomok és molekulák pontszerűek és távoliak bármely makroszkopikus térfogathoz viszonyítva, ennek következtében a multipólsorfejtés szerint járulékok jó közelítéssel

$$\Phi_i(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|} + \frac{\vec{\mathbf{p}}_i \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^3} + \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i) \cdot \vec{\mathbf{Q}}_i \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i)}{2|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_i|^5} + \dots$$

ahol  $\vec{\mathbf{R}}_i$  jelöli az  $i$ -edik atom, illetve molekula helyvektorát,  $q_i = \int \rho_i(\vec{\mathbf{r}}) \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$  az elektromos töltését,  $\vec{\mathbf{p}}_i = \int \rho_i(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{r}} \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$  a dipólmomentum-vektorát, és végül  $\vec{\mathbf{Q}}_i$  a kvadrupólmomentum-tenzorát.

Mivel az atomok és molekulák elektromosan semlegesek, ezért az első tag hiányzik, és csak a magasabb-rendű tagok adnak járulékot.



A szabad töltések elektromos mezeje befolyásolja az egyes molekulák belső töltéseloszlását (**dielektromos polarizáció**), ezáltal bennük dipólmomentumot indukál, így makroszkopikus skálán a **magasabb multipólus-járulékok elhanyagolhatók**.

Nagy számú mikroszkopikus összetevő található bármely makroszkopikus térfogatban, ezért a **molekuláris járulékok összege jól közelíthető egy folytonos dipóluseloszlás segítségével**.

**Polarizáció-vektor**: molekuláris dipólmomentumok

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i$$

összege, ahol az **összegzés egy  $\vec{\mathbf{r}}$  körüli egységnyi térfogatban található molekulákra** terjed ki (dipólmomentum-sűrűség).

Innen a molekuláris potenciáljárulékok összege

$$\begin{aligned} \sum_i \Phi_i(\vec{r}) &= \int \frac{\vec{P}(\vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} d^3\vec{R} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{-\mathbf{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R} + \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

ahol  $\mathcal{V}$  jelöli a polarizálható közeg (**dielektrikum**) által kitöltött térrészt.

$\mathcal{V}$  határán a polarizáció eltűnik, így a felületi integrál zérus. Másrészt

$$\sum_i \int \frac{\rho_i(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R} = \sum_i \Phi_i(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{-\mathbf{div} \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R}$$

ahonnan a kötött töltések sűrűsége

$$\rho_b(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = -\mathbf{div} \vec{P}$$

Mivel  $\mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi(\rho + \sum_i \rho_i)$  a Gauss-törvény következtében, ezért

$$4\pi\rho = \mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} - 4\pi\rho_b = \mathbf{div}(\vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}})$$

vagyis a

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}$$

jelöléssel

$$\mathbf{div} \vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho$$

**Integrális Gauss-törvény** (általános alak): ha  $Q$  jelöli a  $\mathcal{V}$  térrészben található teljes töltésmennyiséget, akkor

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 4\pi Q$$

## 11. A permittivitás (dielektromos állandó)

Spontán polarizáció hiányában a  $\vec{\mathbf{P}}$  polarizációs vektor jól közelíthető  $\vec{\mathbf{E}}$  szerinti sorfejtésének néhány első tagjával

$$\vec{\mathbf{P}} = \kappa \vec{\mathbf{E}} + \dots$$

ahol  $\kappa$  a közeg **elektromos szuszceptibilitása** (vákumban  $\kappa = 0$ ).

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

ahol  $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$  a közeg **permittivitása** (*dielektromos állandója*), amely izotrop esetben skalár, anizotrop esetben tenzor.

**Nem-lineáris anyagok:** permittivitás függ a térerősségtől.

1. táblázat. Néhány anyag permittivitása szobahőmérsékleten

anyag	permittivitás
víz	80
etanol	24
metanol	33
polietilén	2.2
PVC	6.1
plexi-üveg	3.4
paraffin viasz	2.2
bárium-titanát	>2100

Mivel izotrop közegben  $\vec{\mathbf{P}}$  egyirányú  $\vec{\mathbf{E}}$ -vel, ezért  $\kappa \geq 0$  és  $\varepsilon \geq 1$ .

A kötött molekuláris töltések sűrűsége (homogén, izotrop közegben)

$$\rho_b = -\mathbf{div} \vec{\mathbf{P}} = -\kappa \mathbf{div} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\kappa}{\varepsilon} \mathbf{div} \vec{\mathbf{D}} = -\frac{4\pi\kappa}{\varepsilon} \rho = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rho$$

míg a teljes (szabad + kötött) töltéssűrűség

$$\boxed{\rho + \rho_b = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

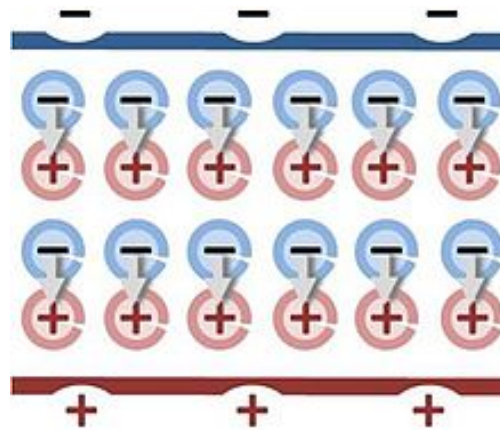
Közeg polarizációjának hatása: szabad töltések leárnyékolása.

Ponttöltés elektrosztatikus mezeje (homogén, izotrop) dielektrikumban

$$\vec{\mathbf{E}}(q, \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{\varepsilon} \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|^3}$$

## 12. Spontán polarizáció

Külső elektromos mező hiányában is nemzérus polarizációs vektor.



**Elektrétek:** poláris molekulákból álló műanyagok és viaszok (metastabil állapot), melyek momentumai befagytak egy irányba miután azokat egy külső mező egy magasabb hőmérsékleten rendezte.

**Ferroelektromos anyagok:** viszonylag erős molekuláris dipólus-dipólus kölcsönhatások következtében **makroszkopikus méretű domének alakulnak ki párhuzamos momentumokkal**, lehetőséget teremtve nemzérus polarizációra külső mező hiányában is.

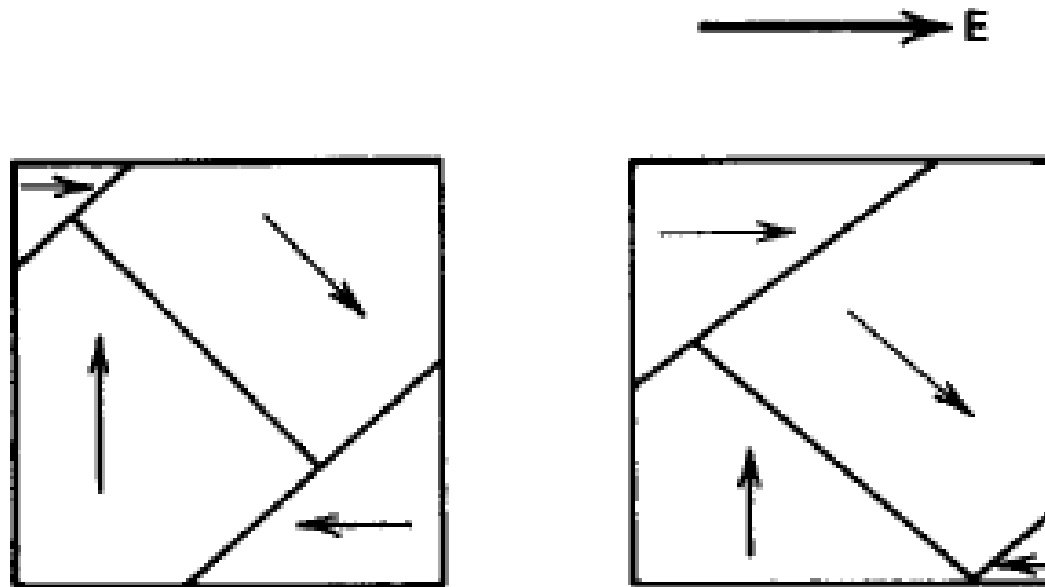
A momentumok iránya függ a minta előéletétől, és csak speciális preparálás esetén lesz teljesen véletlenszerű.

Növekvő hőmérséklettel a polarizáció eltűnik a ferroelektromos **Curie-hőmérsékleten**, mivel a hőmozgás energiája rendezetlenné teszi a momentumok irányát (**másodrendű fázisátalakulás**).

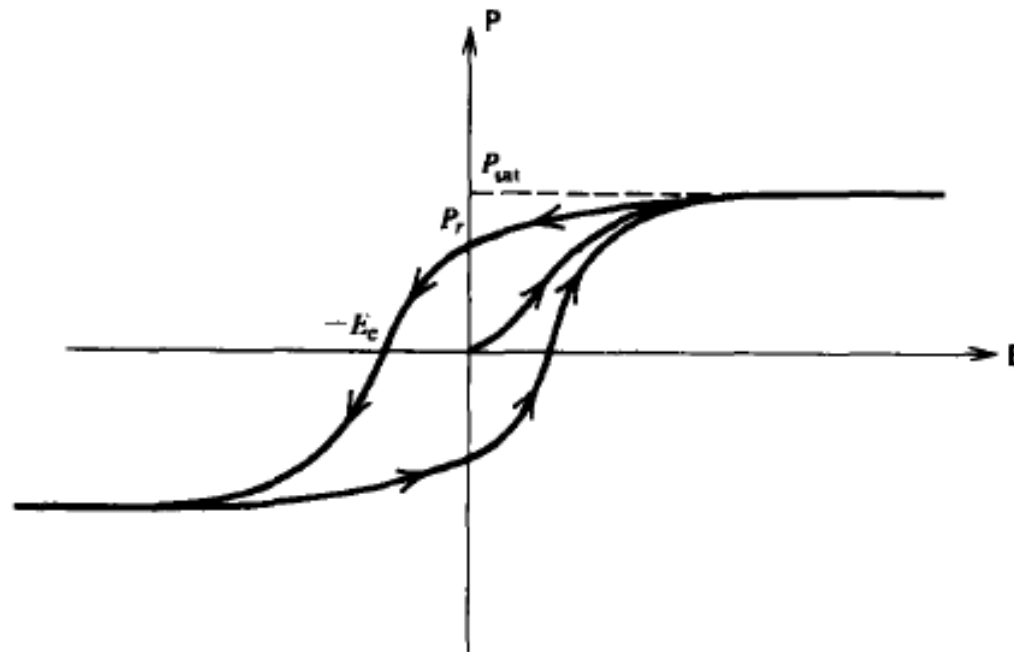


## 12 SPONTÁN POLARIZÁCIÓ

Az egyes molekuláris momentumok csak a domének határán változhatnak, ahol a többi momentum hatása nem annyira jelentős, ezért a külső mező irányával közel párhuzamos irányú domének nőnek a többiek rovására (doménfalak mozgása), ezáltal a polarizáció változik .



**Szaturáció:** a polarizáció nem változik a külső mező hatására (egyetlen domén, az összes momentum párhuzamos a külső mező irányával).



**Hiszterézis:** polarizáció nem csak az adott időpontbeli elektromos mezőtől függ, de annak korábbi értékeitől is (memória-effektus).

## 13. Elektrosztatika vezetőkben

Egy vezető közegben makroszkopikus mennyiségben vannak jelen könnyen elmozdítható mikroszkopikus töltéshordozók, amelyek az elektrosztatikus mező hatására mozgásba jönnek, ezáltal konduktív töltésáramlás lép fel, így statikus egyensúly csak akkor lehetséges, ha a térerősség eltűnik, azaz  $\vec{E} = \vec{0}$  a vezető belsejében.

Vezetők belsejéből az elektrosztatikus mező kiszorul!

$\text{grad } \Phi = \vec{0}$  miatt az összefüggő vezető térrészek (elektrodák) belsejében a potenciál konstans, azok ekvipotenciális tartományok.

Vezető elektródák szerepe az elektrosztatikában: **határfeltétel** a Poisson-egyenlet megoldásánál (a potenciál konstans az elektróda belsejében).

Mikroszkopikus magyarázat: egy **vezető test határfelületén oly módon halmozódnak fel a külső elektrosztatikus mező hatására a mikroszkopikus töltéshordozók (indukált felületi töltéssűrűség)**, hogy annak belsejében – de nem azon kívül! – **elektromos mezejük pontosan kioltsa, 'leárnyékolja'** a külső mezőt.

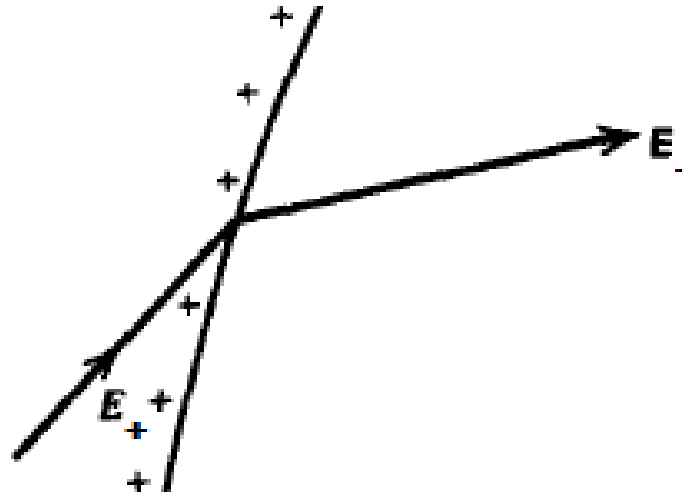
*Megjegyzés:* az indukált felületi töltéssűrűség meghatározható a Poisson-egyenlet megoldásából az elektródákon kívüli térrészben.

## 14. Illesztési feltételek közegek határán

Míg egy közeg belsejében a térjellemzők folytonosan változnak, addig két különböző közeg határán egyesek ugrást szenvedhetnek: értékük a határfelület egy adott pontjában függ attól, hogy azt a felület melyik oldaláról közelítjük meg, **diszkontinuitás** lép fel.

*Magyarázat:* ha minden térjellemző folytonosan változna, akkor mindkét közegben ugyanazon anyagi összefüggések teljesülnének, és a két közeg nem lenne egymástól megkülönböztethető elektromos szempontból.

Különböző közegek határfelületén töltések halmozódhatnak fel, illetve áramolhatnak annak mentén  $\rightsquigarrow$  **felületi töltések** és **áramok**.



*Észrevétel.* A határfelület egy makroszkopikus idealizáció, valójában egy vékony, néhány atomnyi vastagságú rétegről van szó, amelyen belül a térjellemezők gyorsan, de még mindig folytonosan változnak, viszont ez az átmeneti zóna makroszkopikus skálán egy felületként kezelhető, és a térjellemezők gyors változása diszkontinuitásként írható le.

Egy tetszőleges  $\vec{w}(\vec{r})$  vektormező jellemezhető egy  $\mathcal{F}$  felület mentén

$$\vec{w}_n(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$$

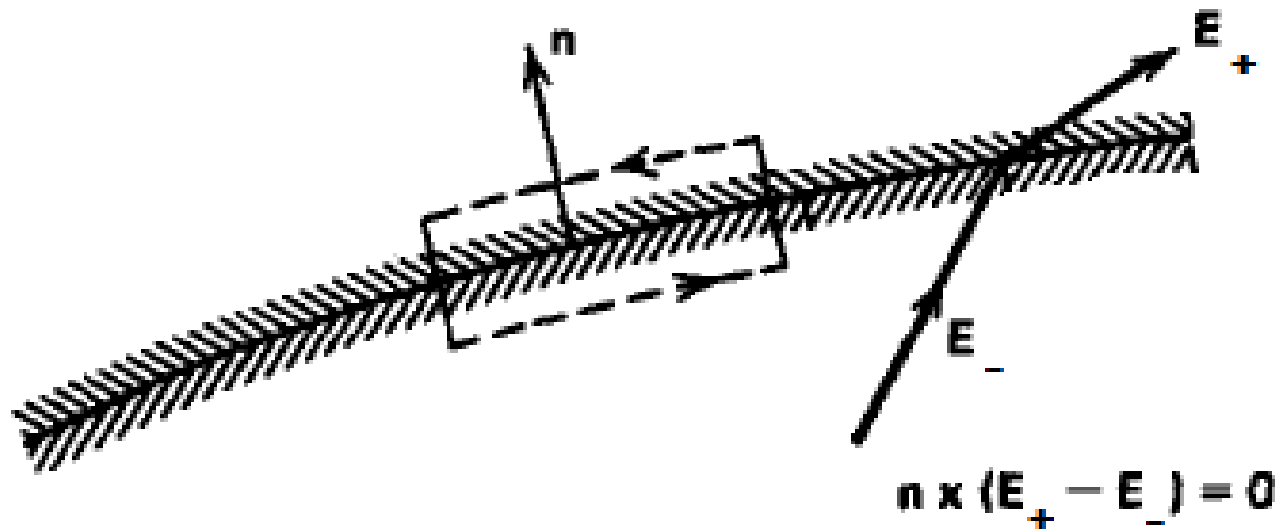
normális vetületével és

$$\vec{w}_t(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r}) - \vec{w}_n(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r})$$

érintőirányú (tangenciális) komponensével, ahol  $\vec{n}(\vec{r})$  jelöli az  $\mathcal{F}$  felület normális egységvektorát az  $\vec{r}$  helyvektorú pontban.

A  $\vec{w}_n(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r})$  normális komponens merőleges a felületre az adott pontban, míg a  $\vec{w}_t(\vec{r})$  tangenciális komponens párhuzamos azzal.

Tekintsünk egy, a két közeg határán haladó kicsiny görbe darabot, és jelölje  $\Delta\vec{R}$  annak ívelem-vektorát, amely szükségszerűen érintőirányú.



A határfelület egyik oldalán jelölje a térerősséget  $\vec{E}_-(\vec{r})$ , míg ugyanazon  $\vec{r}$  helyvektorú pontban a másik oldalon  $\vec{E}_+(\vec{r})$ .



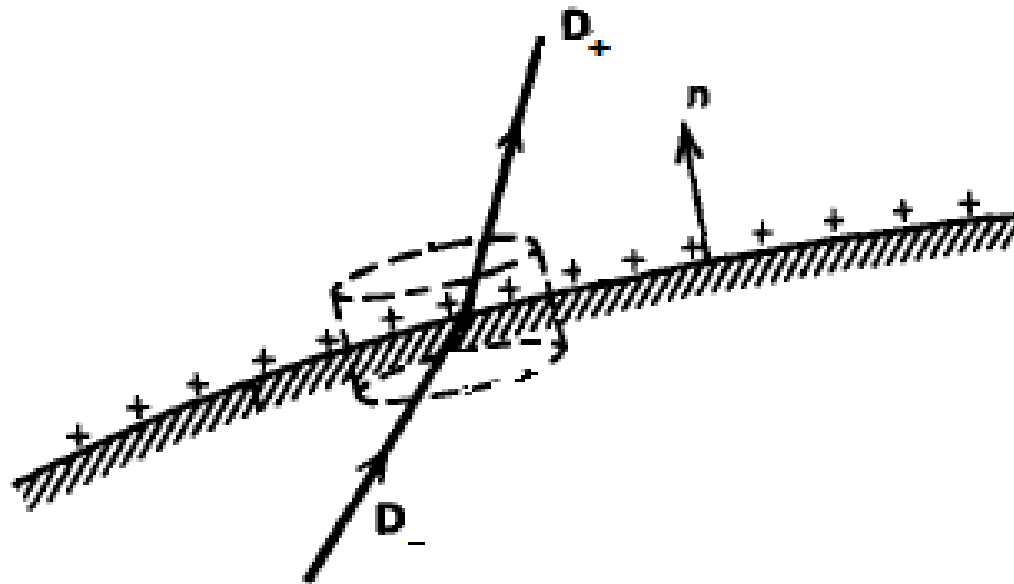
Mivel az **elektrosztatikus mező konzervatív**, ezért egy egységnyi próbatöltésnek a görbedarab mentén történő mozgásához szükséges munka független attól, hogy a határfelület melyik oldalán mozog a töltés, azaz

$$\vec{\mathbf{E}}_-(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{E}}_+(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{R}}$$

Mivel  $\Delta\vec{\mathbf{R}}$  tetszőleges, a határfelületet érintő vektor lehet, ezért a térerősségvektor ugrása szükségszerűen normális irányú.

Különböző közegek határán az elektromos térerősség  
**tangenciális komponense folytonosan változik!**

Tekintsünk egy, a határfelületet merőlegesen metsző és mindkét közegbe benyúló  $\mathcal{V}$  hengeres testet. Jelölje  $\mathcal{F}_-$  és  $\mathcal{F}_+$  a hengerfelület alap- és fedőlapját, míg  $\mathcal{P}$  a palástját.



Ha  $Q$  jelöli a  $\mathcal{V}$  belsejében található összes töltést, akkor

$$4\pi Q = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\mathcal{F}_-} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\mathcal{F}_+} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

a Gauss-törvény szerint. A hengert a felületre lapítva, a  $\mathcal{P}$  palástra vett integrál – mivel az a palást felszínével arányos – nullához tart

$$\int_{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \rightarrow 0$$

míg az  $\mathcal{F}_-$  és  $\mathcal{F}_+$  alap- és fedőlap rásimul a határfelület  $\mathcal{F}$  darabjára, míg a  $\mathcal{V}$  belsejében található töltések a felületre koncentrálnak, így

$$Q = \int_{\mathcal{F}} \eta(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

ahol  $\eta(\vec{\mathbf{r}})$  a felületi töltéssűrűség.

Zárt felület esetén a felületelem mindig a külső normális irányába mutat (konvenció szerint), ezért

$$\int_{\mathcal{F}_{\pm}} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \rightarrow \pm \int_{\mathcal{F}} \vec{\mathbf{D}}_{\pm} d\vec{\mathbf{s}}$$

figyelembe véve, hogy a felület egyik oldalán az eltolási vektor értéke  $\vec{\mathbf{D}}_{+}$ , míg a másikon  $\vec{\mathbf{D}}_{-}$ . Innen

$$4\pi \int_{\mathcal{F}} \eta(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{F}} (\vec{\mathbf{D}}_{+} - \vec{\mathbf{D}}_{-}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Az  $\mathcal{F}$  felületet egy pontra összehúzva adódik

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}}_{+} - \vec{\mathbf{D}}_{-} = 4\pi\eta\vec{\mathbf{n}}(\vec{\mathbf{r}})}$$

$\vec{\mathbf{D}}$  normális komponense  $4\pi\eta$  nagyságú ugrást szenved a határfelületen!

**Vezető-dielektrikum határfelületen**, mivel a vezető belsejéből kiszorul az elektrosztatikus mező, ezért ott  $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{0}}$ , következésképpen a  $\vec{\mathbf{D}}$  normális komponensének dielektrikumbeli értéke a határon egyenlő az indukált felületi töltéssűrűség  $4\pi$ -szeresével.

Egy a vezető testet kettéosztva egy elég kicsiny,  $\vec{\mathbf{n}}$  normálisú és  $F$  felszínű keresztmetszet mentén, az előzőek alapján az egyes részek

$$Q_{\pm} = \pm F \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$$

töltésre tesznek szert, ezért  $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}$  az **elektrosztatikus indukciót** (elektromos megosztás) **jellemző eltolási vektor!**