Vektoranalízis

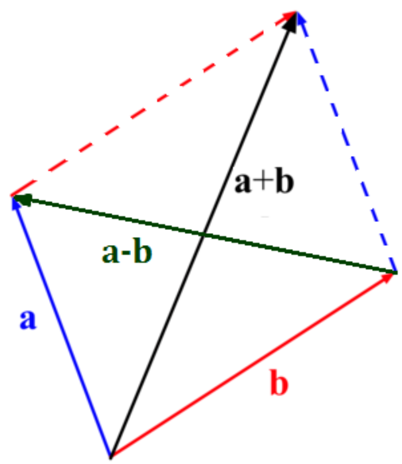
1. Alapfogalmak

Vektor: olyan mennyiség, amelyet egy nagyság és egy irány jellemez (vektor hossza = nagyságának abszolút értéke).

Példák: elmozdulás, sebesség, erő, impulzus, stb.

Térbeli pontok jellemezhetők $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorukkal: tetszőlegesen választott O referenciapontból (origó) a kérdéses pontba mutató vektor.

Parallelogramma-szabály: $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ összege és $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ különbsége az általuk kifeszített parallelogramma két átlója.

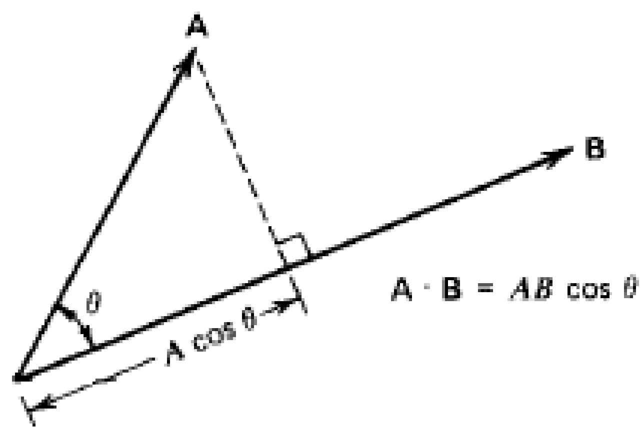


Skalár és vektor szorzata: eredetivel párhuzamos irányú vektor, nagysága megegyezik a skalár és a vektor nagyságának szorzatával (egy irányba mutat az eredetivel ha a skalár pozitív, és ellentétes irányú ha negatív).

Skalárszorzat:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

ahol θ az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ iránya által bezárt szög.

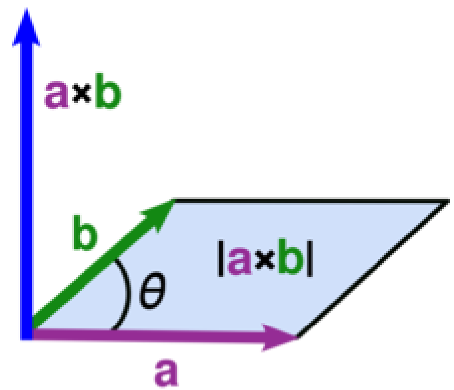


$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \qquad \text{szimmetria}$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \alpha\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}} + \beta\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}} \qquad \text{linearitás}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2 \geq 0 \qquad \text{pozitivitás}$$

Vektoriális (kereszt-)szorzat: $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ olyan vektor, amely merőleges mindkét vektorra, nagysága pedig megegyezik a két vektor által kifeszített parallelogramma előjeles területével.

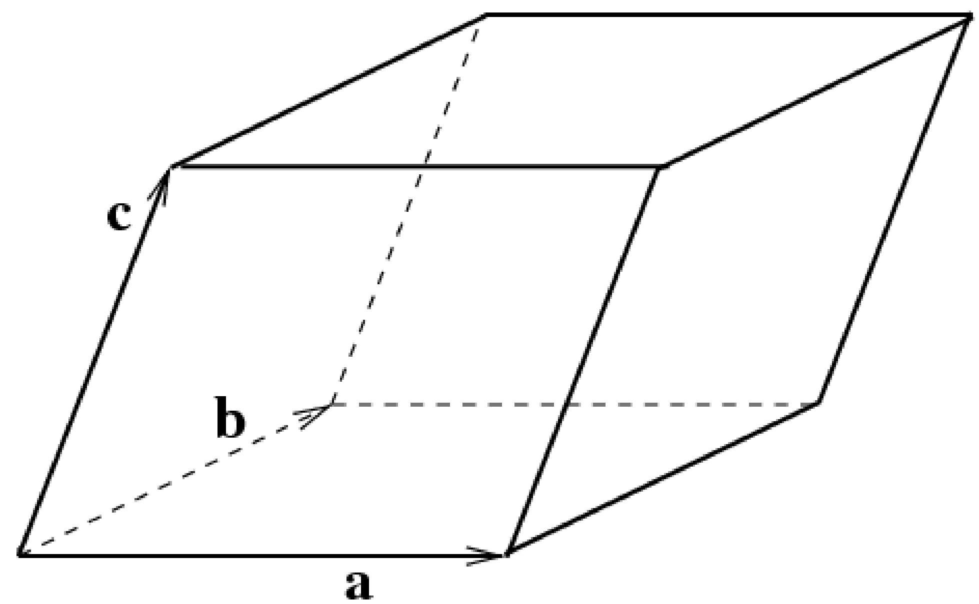


$$|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\theta$$

$$|\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2$$

Hármasszorzat ('vegyes szorzat'): $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$.

Az $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ hármasszorzat egyenlő az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogatával, $\mathtt{vol}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$-vel.



Nem-zérus vektorok hármasszorzata akkor és csak akkor nulla, ha azok koplanárisak (egysíkuak).

Műveleti szabályok:

$$\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} \qquad \text{antiszimmetria}$$

$$(\alpha\vec{\mathbf{a}}+\beta\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}})+\beta(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) \qquad \text{linearitás}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} \qquad \text{kifejtési tétel}$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{d}})-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{d}})(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) \qquad \text{Lagrange–azonosság}$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{d}}) = \left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{d}}\right)\vec{\mathbf{c}}-\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)\vec{\mathbf{d}}$$

$$\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right) = \left(\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{a}}\right)$$

Nem-zérus vektorok skalár-, ill. kereszt-szorzata akkor és csak akkor nulla, ha azok merőlegesek, ill. párhuzamosak.

Vektorok numerikus jellemzése vektorkomponensekkel.

Bármely három nem koplanáris $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ és $\vec{\mathbf{e}}_3$ vektor bázist alkot, mert minden vektor egyértelműen előállítható

$$\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2 + a_3\vec{\mathbf{e}}_3$$

alakban valamely a_1, a_2 és a_3 skalár együtthatókkal, az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ bázisra vonatkozó vektorkomponenseivel.

Ortonormált bázis: egységnyi hosszúságú és egymásra kölcsönösen merőleges ('ortogonális') vektorok alkotta $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ bázis

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

$\texttt{vol}(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) = \pm 1$ bármely ortonormált bázisra (pozitív/negatív előjellel jobb/bal-sodrású esetben).

Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor komponenseinek kifejezése egy $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ ortonormált bázisra vonatkozóan $a_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_i$, míg a különféle vektorszorzatok kifejezése

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{\mathbf{e}}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{\mathbf{e}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{\mathbf{e}}_3$$

és

$$\texttt{vol}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

2. Skalár-, vektor- és tenzormezők

Skalár(vektor-, tenzor-)mező: adott tenzori jellegű helyfüggő mennyiség.

Helyfüggő $\mathcal{A}$ mennyiség jellemzése $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ függvénnyel ($\mathcal{A}$ mennyiség értéke az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú pontban).

Skalármező geometriai jellemzése szintfelületekkel (azon pontok mértani helye, melyeken a skalármező ugyanazon értéket veszi fel).

Vektormező geometriai jellemzése áramgörbékkel (azon görbék, melyek érintője minden pontban párhuzamos a vektormező adott pontban felvett értékének irányával).

3. Görbevonalú koordináták

Görbevonalú koordináták: háromdimenziós tér pontjainak jellemzése $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}$ valós számhármasokkal, ahol $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ egy olyan részhalmaz (fundamentális tartomány), melynek két különböző belső pontja két különböző térbeli pontnak felel meg (határra ez már nem szükségszerű).

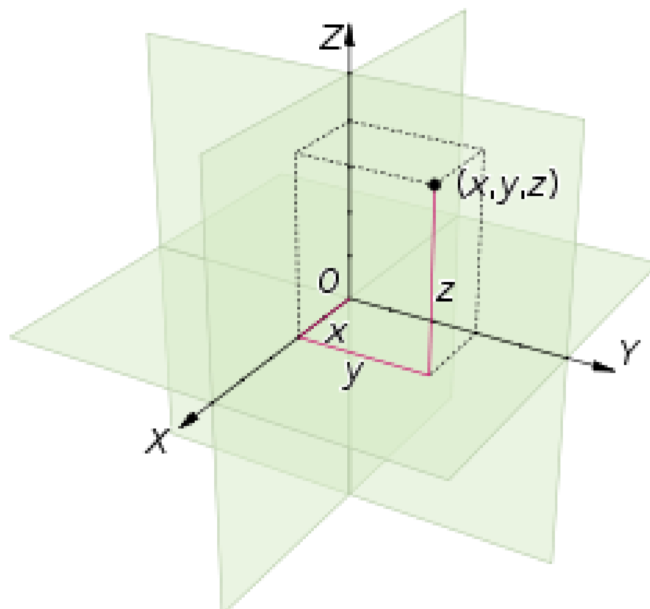
Görbevonalú koordináták választása tetszőleges, csak praktikus megfontolások befolyásolják (pl. szimmetria).

Görbevonalú koordináták választását jellemző $\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$ összefüggés minden $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}$ számhármas esetén megadja a megfelelő térbeli pont helyvektorát.

Példák:

1. (x, y, z) Descartes-koordináták

   $$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \,|\, -\infty < x, y, z < +\infty\}$$

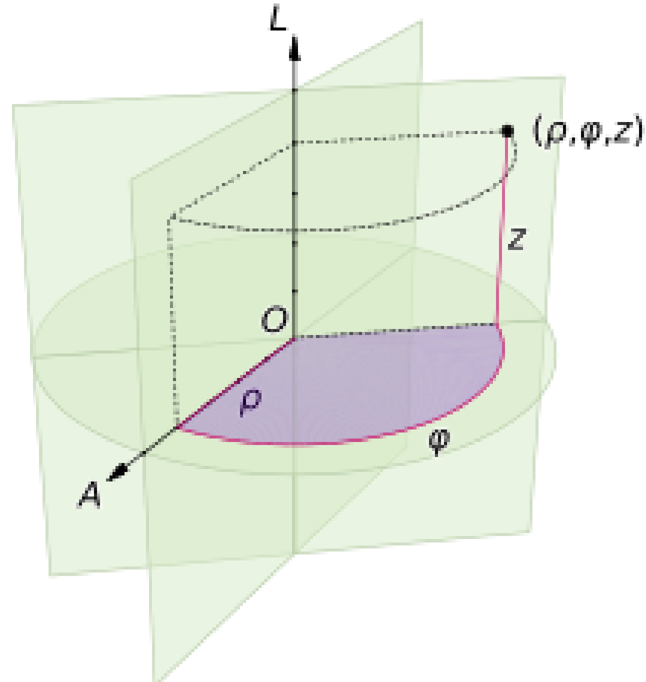


   $$\vec{\mathbf{r}}(x, y, z) = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 + z\vec{\mathbf{e}}_3$$

   Térfogatelem: $\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \mathtt{d}x\,\mathtt{d}y\,\mathtt{d}z.$

2. (ϱ, φ, z) hengerkoordináták

$$\mathcal{D} = \{(\varrho, \varphi, z)\,|0 \le \varrho < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$$

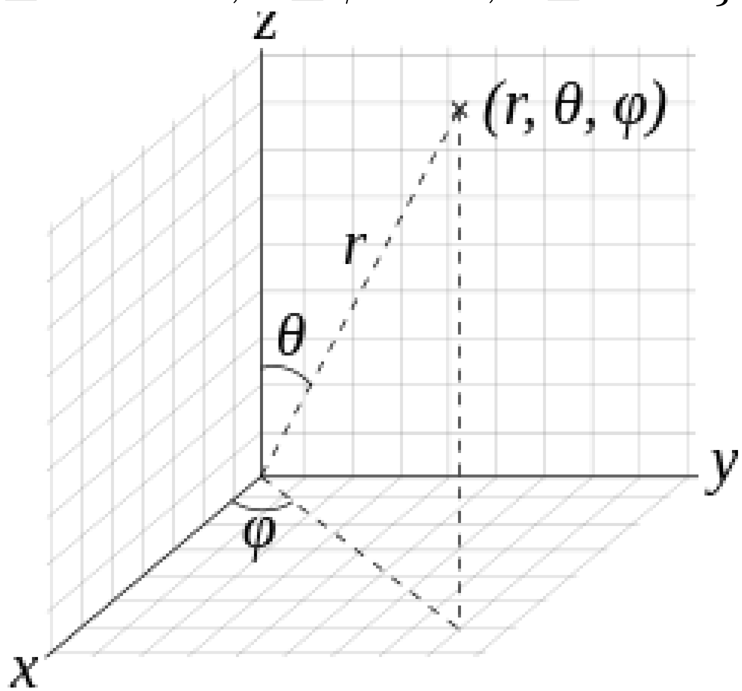


$$\vec{\mathbf{r}}(\varrho, \varphi, z) = \varrho \cos\varphi\, \vec{\mathbf{e}}_1 + \varrho \sin\varphi\, \vec{\mathbf{e}}_2 + z\, \vec{\mathbf{e}}_3$$

Térfogatelem: $\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \varrho\, \mathtt{d}\varrho\, \mathtt{d}\varphi\, \mathtt{d}z$

3. (r,ϕ,ϑ) gömbkoordináták

$$\mathcal{D}=\{(r,\phi,\vartheta)\,|0\leq r<+\infty, 0\leq\phi<2\pi, 0\leq\vartheta<\pi\}$$



$$\vec{\mathbf{r}}(r,\phi,\vartheta)=r\cos\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_1+r\sin\phi\sin\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_2+r\cos\vartheta\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

Térfogatelem: $\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}=r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\vartheta$

1. Descartes-koordináták $\leftrightarrow$ hengerkoordináták:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = \varrho \cos\varphi$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

$$z = z$$

2. Descartes-koordináták $\leftrightarrow$ gömbkoordináták:

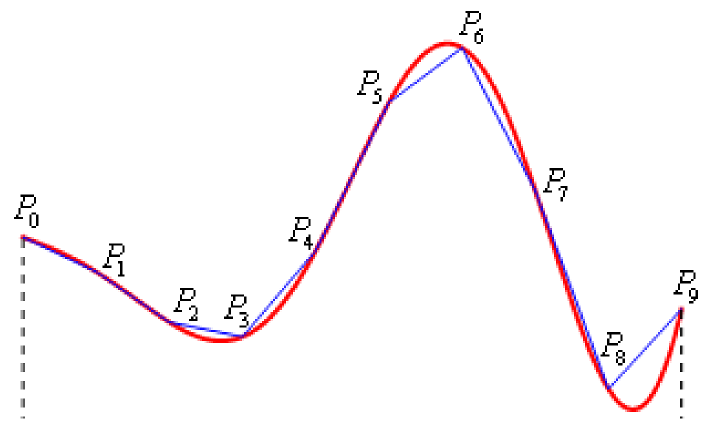
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = r \cos\phi \sin\vartheta$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = r \sin\phi \sin\vartheta$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \qquad z = r \cos\vartheta$$

4. Vonalmenti integrálok

Tekintsünk egy $\boldsymbol{\Gamma}$ folytonos görbét és egy $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. A $\boldsymbol{\Gamma}$ görbe minden $\boldsymbol{\Gamma} = \cup_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Gamma}_i$ felosztására át nem lapoló kis darabokra jelölje $\vec{\mathbf{r}}_i$ a $\boldsymbol{\Gamma}_i$ valamely pontját és $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ a kezdőpontjából a végpontjába mutató vektort.



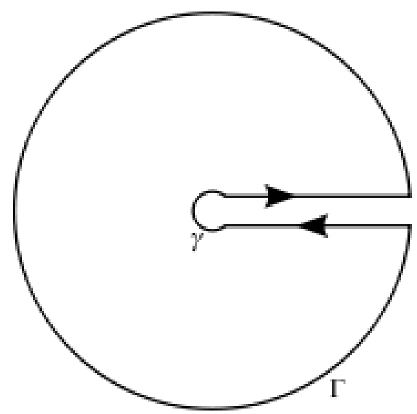
Ahogy a felosztást finomítjuk, azaz $\max_i |\Delta\vec{\mathbf{r}}_i|$ (görbeszakaszok hossza) egyre kisebb és kisebb lesz, a

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$$

összeg – ahol $\star$ valamely (skaláris, ill. vektoriális) szorzatot jelöl – egy

$$\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

határértékhez tart, az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség $\boldsymbol{\Gamma}$-menti vonalintegráljához.



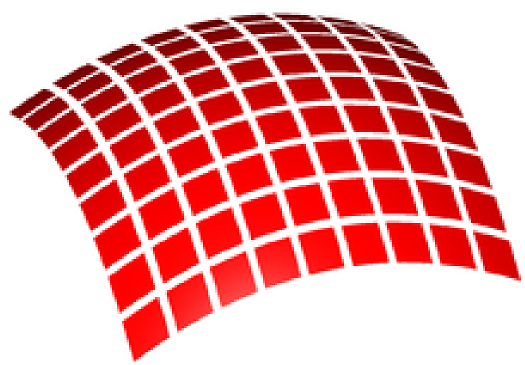
Skalármennyiség vonalintegrálja mindig vektormennyiség, viszont egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőnek két különféle integrálja képezhető: egy $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ skaláris, és egy $\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ vektoriális vonalintegrál.

A $\boldsymbol{\Gamma}$ görbe ismert $\vec{\mathbf{r}}(t)$ paraméterezése esetén (ahol $\vec{\mathbf{r}}(0)$ a $\boldsymbol{\Gamma}$ kezdőpontja, míg $\vec{\mathbf{r}}(1)$ a végpontja) a vonalintegrál számolása egy határozott integrálra vezethető vissza az alábbi képlet segítségével

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_0^1 \left(\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \star \frac{\mathsf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathsf{d}t} \right) \mathsf{d}t$$

5. Felületi integrálok

Tekintsünk egy $\mathbf{\Sigma}$ felületet és egy azon értelmezett $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. Osszuk fel a felületet kicsiny, át nem lapoló $\mathbf{\Sigma}_i$ darabokra: ezek mindegyikét jellemezhetjük valamely belső pontjuk $\vec{\mathbf{r}}_i$ helyvektorával és $\vec{\mathbf{\Delta s}}_i$ felületelem-vektorukkal, mely az $\vec{\mathbf{r}}_i$ pontbeli normális (a felületre merőleges) irányba mutat, míg nagysága megegyezik a felületdarab $|\mathbf{\Sigma}_i|$ területével.



Ahogy a felosztást finomítjuk, azaz $\max_i |\mathbf{\Sigma}_i|$ egyre kisebb lesz, a

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i) \star \vec{\mathbf{\Delta}}\mathfrak{s}_i$$

összeg (tetszőleges $\star$ szorzatra) a

$$\int_{\mathbf{\Sigma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

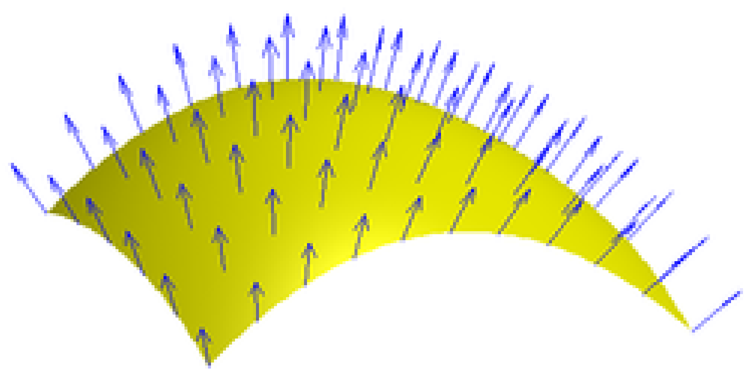
határértékhez tart, az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ mennyiség $\mathbf{\Sigma}$ feletti felületi integráljához.

Skalármező felületi integrálja mindig vektormennyiség, ezzel szemben egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőnek két különböző felületi integrálja képezhető: egy $\int_{\mathbf{\Sigma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ skaláris és egy $\int_{\mathbf{\Sigma}} \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ vektoriális.

Ha adott a felület egy $\vec{\mathbf{r}}(u,v)$ parametrizációja, ahol $(u,v) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, a felületi integrál egy kettős integrálra redukálódik az alábbi képlet alapján

$$\int_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) \star \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = \iint_{\mathcal{D}} \left\{ \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}\,(u,v)) \star \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \right) \right\} \mathsf{d}u \mathsf{d}v$$

Egy zárt (határoló görbe nélküli) $\boldsymbol{\Sigma}$ felület mindig egy korlátos $\mathcal{V}$ térrészt határol: $\boldsymbol{\Sigma} = \partial\mathcal{V}$. Ilyenkor konvenció szerint a $\boldsymbol{\Sigma}$ normálisa kifelé mutat a $\mathcal{V}$ tartományból.



6. Térfogati integrálok

Tekintsünk egy $\mathcal{V}$ térrészt és egy azon értelmezett $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ helyfüggő mennyiséget. Osszuk fel a térrészt kicsiny, át nem lapoló $\mathcal{V}_i$ részekre, és jelölje $|\mathcal{V}_i|$ ezek térfogatát, míg $\vec{\mathbf{r}}_i$ valamely belső pontjuk helyvektorát. A

$$\sum_i \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}_i)\,|\mathcal{V}_i|$$

összegek a felosztás finomításával egy véges határértékhez tartanak, az

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

térfogati integrálhoz.

A térfogati integrál tenzori jellege ugyanaz, mint az integrandusé, és a $\mathcal{V}$ térrész (előjeles) térfogata egyenlő az $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}) = 1$ konstans függvény tréfogati integráljával:

$$|\mathcal{V}| = \int_{\mathcal{V}} 1\, \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}}$$

Ha ismert a térrész pontjainak egy $\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3)$ parametrizációja valamely $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ görbevonalú koordináták segítségével, akkor a térfogati integrál átalakítható egy hármas integrállá

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})\, \mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \iiint_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}}(u_1, u_2, u_3))\mathtt{vol}\Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_3}\Big)\mathtt{d}u_1\mathtt{d}u_2\mathtt{d}u_3$$

7. Divergencia és rotáció

Egy $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{v}}$ divergenciájának ('forrásosság') és $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}}$ rotációjának ('örvényesség') értéke egy adott pontban

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{v}} = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}} = \lim \frac{-1}{|\mathcal{V}|} \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

ahol a határértéket úgy kell képezni, hogy a $|\mathcal{V}|$ térfogatú és $\partial\mathcal{V}$ határoló felületű $\mathcal{V}$ térrészt a kérdéses pontra zsugorítjuk.

Egy vektormező divergenciája (skalármező) és rotációja (vektormező) annak lokális viselkedését jellemzik.

A $\vec{\mathbf{v}}$ vektormező divergenciájának és rotációjának kifejezése Descartes-koordinátákban

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

illetve

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{e}}_z$$

Vektormező rotációja mindig forrásmentes, azaz

$$\boxed{\mathbf{div}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}}) = 0}$$

Fordítva, ha egy vektormező forrásmentes, akkor egy másik vektormező rotációja (egyszeresen összefüggő tartomány belsejében).

Divergencia-tétel (Gauss-tétel): vektormező divergenciájának térfogati integrálja egy $\mathcal{V}$ térrészre egyenlő a vektormező felületi integráljával a térrész $\partial\mathcal{V}$ határfelületére

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{v}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}}$$

Stokes-tétel: vektormező rotációjának felületi integrálja egy $\mathcal{F}$ felületre egyenlő a vektormezőnek a felületet határoló $\partial\mathcal{F}$ görbére vett vonalmenti integráljával

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}$$

8. Skalármező gradiense

Egy $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező gradiense a

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \lim \frac{1}{|\mathcal{V}|} \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} \Phi(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}$$

képlettel értelmezett vektormező, ahol a határértéket úgy kell képezni (a divergencia és a rotáció definíciójához hasonlóan), hogy a $|\mathcal{V}|$ térfogatú és $\partial\mathcal{V}$ határoló felületű $\mathcal{V}$ térrészt a vizsgált pontra zsugorítjuk.

A gradiens kifejezése Descartes-koordinátákban

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z$$

Gradiens-tétel: skalármező gradiensének egy $\boldsymbol{\Gamma}$ görbére vett vonalmenti integrálja egyenlő a skalármezőnek a görbe $\boldsymbol{\Gamma}_+$ végpontjában és $\boldsymbol{\Gamma}_-$ kezdőpontjában felvett értékének a különbségével

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{grad}\, \Phi \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \Phi(\boldsymbol{\Gamma}_+) - \Phi(\boldsymbol{\Gamma}_-)}$$

Megjegyzés: gradiens-tétel a klasszikus Newton-Leibnitz-formulát adja vissza ha γ egy egyenes szakasz.

Következmény: elég kicsiny $\vec{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{r}$ elmozdulásra

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{r}) = \Phi(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}\, \Phi(\vec{\mathbf{r}}) + \ldots$$

Egy $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Phi(\vec{\mathbf{r}}+\varepsilon\vec{\mathbf{n}}) - \Phi(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon}$$

iránymenti deriváltja (változási sebessége az $\vec{\mathbf{n}}$ egységvektor irányában) egyenlő a $\mathbf{grad}\,\Phi\cdot\vec{\mathbf{n}}$ skalárszorzattal, ezért a gradiens a leggyorsabb változás irányába mutat, és nagysága a maximális változás sebességét jellemzi.

Skalármező gradiense mindig örvénymentes:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,\Phi) = \vec{\mathbf{0}}}$$

Fordítva, minden örvénymentes vektormező előállítható (lokálisan) egy megfelelő skalármező gradienseként.

9. A Laplace-operátor

A skaláris Laplace–operátor minden $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ skalármezőhöz hozzárendeli gradiensének divergenciáját, azaz a

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\Phi = \mathbf{div}(\mathbf{grad}\,\Phi)}$$

skalármezőt rendeli hozzá, míg a vektoriális Laplace–operátor egy $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőhöz a

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{w}}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{w}})}$$

vektormezőt.

A skaláris Laplace–operátor kifejezése Descartes-koordinátákkal

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

míg a vektoriális Laplace–operátoré

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_x + \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_y$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right)\vec{\mathfrak{e}}_z$$

Vagyis a vektoriális Laplace–operátor hatását úgy kaphatjuk meg, hogy a skaláris Laplace–operátort alkalmazzuk a $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező minden egyes Descartes–komponensére külön-külön.